

N° D'ORDRE :

453

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR DOCTEUR

par

Jean MIROUX

1^{re} THÈSE: Sur un nouvel analyseur analogique de régimes transitoires.

Application à l'étude de certains phénomènes de régime variable.

2^e THÈSE: Sur la mesure des gradients en analogies rhéoelectriques
(Appareil pour le relevé direct des isovitesses)

Soutenues le 11 Juin 1954, devant la Commission d'examen.

MM. RIBAUD, Président

PÉRÈS	}	Examineurs.
BRUN		
MALAVARD		

O.N.E.R.A.

29, Avenue de la Division Leclerc
CHATILLON-SOUS-BAGNEUX

1955

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR DOCTEUR

par

Jean MIROUX

1^{re} THÈSE : Sur un nouvel analyseur analogique de régimes transitoires.
Application à l'étude de certains phénomènes de régime variable.

2^e THÈSE : Sur la mesure des gradients en analogies rhéoélectriques
(Appareil pour le relevé direct des isovitesses)

Soutenues le 11 Juin 1954, devant la Commission d'examen.

MM. RIBAUD, Président

PÉRÈS	}	Examineurs.
BRUN		
MALAVARD		

O.N.E.R.A.

29, Avenue de la Division Leclerc
CHATILLON-SOUS-BAGNEUX

1955

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PERES

PROFESSEURS

G. JULIA T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	ARNULF T	Optique appliquée.
A. DENJOY T	Théorie des fonctions.	Max MORAND	Physique.
L. LUTAUD T	Géographie physique et Géologie dynamique.	SOLEILLET T	Physique.
E. DARMOIS T	Enseignement de Physique.	FORTIER T	Mécanique expérimentale des fluides.
Robert LÉVY T	Physiologie comparée.	DANJON T	Astronomie.
FOCH T	Mécanique physique et expérimentale.	FROMAGEOT T	Chimie biologique.
PAUTHENIER T	Electrotechnique générale.	LAPORTE T	Physique générale et radio-activité.
De BROGLIE T	Théories physiques.	JANET T	Mécanique analytique et mécanique céleste.
JOB T	Chimie générale.	PETIT T	Biologie maritime.
PRENANT T	Anatomie et Histologie comparées.	QUENEY T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GARNIER T	Géométrie supérieure.	GALLIEN T	Biologie animale (P.C.B.).
PÉRÈS T	Mécanique des fluides et applications.	EICHHORN T	Biologie végétale (P.C.B.).
LAUGIER T	Physiologie générale.	De CUGNAC T	Biologie végétale (P.C.B.).
M. CURIE T	Physique (P.C.B.).	Mlle CAUCHOIS T	Chimie-Physique.
G. RIBAUD T	Hautes températures.	THELLIER T	Physique du Globe.
CROZE T	Physique théorique et physique céleste.	AUDUBERT T	Electro-chimie.
DUPONT T	Théories chimiques.	L'HÉRITIER T	Génétique.
VALIRON T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	GRIVET T	Radio Electricité.
BARRABÉ T	Géologie structurale et géologie appliquée.	PONCIN T	Mécanique des fluides.
G. DARMOIS T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	THIRY T	Mécanique appliquée.
Jacques BOURCART T	Géographie physique et Géologie dynamique.	DUBREIL T	Arithmétique et théorie des nombres.
AUBEL T	Chimie biologique.	QUELET T	Chimie (P.C.B.).
Mme JOLIOT-CURIE T	Physique générale et Radio-activité.	CAGNIARD T	Géophysique appliquée.
PLANTEFOL T	Botanique.	CHAMPETIER T	Chimie macromoléculaire.
CABANNES T	Recherches physiques.	CUVILLIER T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
GRASSÉ T	Evolution des êtres organisés.	JUNG T	Pétrographie.
PRÉVOST T	Chimie organique.	TRILLAT T	Chimie physique.
BOULIGAND T	Application de l'analyse à la Géométrie.	WIEMANN T	Chimie (P.C.B.).
CHAUDRON T	Chimie appliquée.	JACQUINOT T	Physique (P.C.B.).
WYART T	Minéralogie.	VASSY	Physique de l'atmosphère.
TEISSIER T	Zoologie.	DESTOUCHES	Théories physiques.
MANGENOT T	Biologie végétale.	M. PRUVOST T	Géologie.
P. AUGER T	Physique quantique et relativité.	AMIEL T	Chimie (P.C.B.).
MONNIER	Physiologie générale.	HOCART T	Minéralogie.
PIVETEAU T	Géologie.	J.-P. MATHIEU T	Physique (P.C.B.).
ROCARD T	Physique.	COUTEAUX	Biologie animale (P.C.B.).
H. CARTAN T	Mathématiques (E.N. Supérieure).	MAY	Biologie animale (P.C.B.).
LAFFITE T	Chimie générale.	FELDMANN	Biologie (P.C.B.).
FAVARD T	Mécanique générale.	GUINIER T	Physique (P.C.B.).
COULOMB T	Physique du Globe.	JOST T	Biologie (P.C.B.).
Mlle COUSIN T	Biologie animale (P.C.B.).	FORTET	Calcul des probabilités.
CHRÉTIEN T	Chimie minérale.	SCHWARTZ T	Méthode mathématique de la Physique.
P. DRACH T	Zoologie.	CHOUARD T	Physiologie végétale.
KASTLER T	Physique.	MALAVARD T	Aviation.
EPHRUSSI T	Génétique.	BRELOT T	Calcul différentiel.
WURMSER T	Biologie physico-chimique.	NORMANT T	Chimie (P.C.B.).
RIVIÈRE T	Géologie (P.B.C.).	BENARD	Chimie (P.C.B.).
GAUTHERET T	Biologie Végétale (P.C.B.).	BUVAT	Botanique (E.N.S.).
LUCAS T	Physique.	DUGUÉ	Statistique mathématique.
A. THOMAS T	Biologie cellulaire.	GÉLOSO	Chimie (P.C.B.).
		SOULAIRAC	Psychophysiologie.
		ULRICH	Physiologie végétale.
		MARÉCHAL	Optique théorique et appliquée.

Secrétaire Général CH. MONIER



A mon Père
A ma Mère



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547110_0020

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
NOTATIONS	3
SOMMAIRE	5
INTRODUCTION	7
 I - MÉTHODES ANALOGIQUES UTILISÉES DANS L'ÉTUDE DE LA CHALEUR ..	 9
1.- ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA CHALEUR	9
2.- LES CHAMPS CALORIFIQUES STATIONNAIRES	11
3.- LES TECHNIQUES ANALOGIQUES D'ÉTUDE DES RÉGIMES TRANSITOIRES ...	11
4.- CARACTÉRISTIQUES DES PRINCIPALES MACHINES ANALOGIQUES	12
5.- LES PETITES MACHINES SPÉCIALISÉES	14
 II - PRINCIPE ET RÉALISATION DU NOUVEL ANALYSEUR DE RÉGIMES TRANSITOIRES	 15
1.- PRINCIPE	15
2.- DESCRIPTION DU CONTACTEUR TOURNANT	18
a) Commutateur	18
b) Potentiomètre	19
c) Entraînement	20
3.- FONCTIONNEMENT DU CONTACTEUR	20
4.- APPAREIL DE RELEVÉ DES COURBES DE RÉPONSE	22
a) Circuits de la base de temps	22
b) Examen d'une partie de la décharge	25
c) Circuit de charge	26
d) Tensions verticales	26
e) Tube cathodique	27
5.- RÉGLAGE ET FONCTIONNEMENT DE L'ENSEMBLE	27
 III - CONSTRUCTION DES RÉSEAUX A RÉSISTANCES ET CAPACITÉS	 31
1.- RÉSEAUX UNI-DIMENSIONNELS	31
a) Plaque	31
b) Cylindre	38
c) Sphère	44
2.- RÉSEAUX BI ET TRI-DIMENSIONNELS	47
a) Réseau bi-dimensionnel avec coordonnées cartésiennes	47
b) Réseau avec symétrie axiale	49
c) Réseau tri-dimensionnel	51
 IV - RÉSULTATS DANS DES CAS THÉORIQUES	 53
1.- VÉRIFICATION DE L'APPAREILLAGE	53
2.- VÉRIFICATION DE LA CONSTRUCTION DES RÉSEAUX	53
a) Plaque chauffée symétriquement	55
b) Plaque chauffée d'un seul côté	55
c) Cylindre	55
d) Sphère	57

	pages
V - APPLICATION A L'ÉTUDE DES CHOCS THERMIQUES DANS LES ÉPROUVETTES PRISMATIQUES DE SECTION CARRÉE	59
1.- MISE EN ÉQUATION	59
2.- EXPÉRIMENTATION	60
3.- CONSTRUCTION DU RÉSEAU	61
4.- RÉSULTATS POUR $m = 0$	62
a) Courbes d'élévation de température	62
b) Champ des isothermes	62
c) Flux thermiques et gradients	62
5.- RÉSULTATS POUR $m = 0,1$	68
a) Courbes d'élévation de température	68
b) Champ des isothermes	68
c) Flux thermiques et gradients	68
6.- RÉSULTATS POUR $m = 1$	72
a) Courbes d'élévation de température	72
b) Champ des isothermes	72
c) Flux thermiques et gradients	72
7.- COMPARAISON DES FLUX THERMIQUES POUR LES DIFFÉRENTS m	72
8.- SYNTHÈSE DES RÉSULTATS SUR LE CHOC THERMIQUE	72
VI - APPLICATION A L'ÉTUDE DE L'ÉLASTICITE VISQUEUSE DANS LES HAUTS POLYMÈRES	79
1.- POSE DU PROBLÈME	79
2.- CHOIX D'UNE ANALOGIE EN LIAISON AVEC L'ANALYSEUR DE RÉGIMES TRANSITOIRES. MONTAGES ENVISAGÉS	81
a) Etude du fluage (Analogie A)	81
b) Etude de la relaxation (Analogie D)	85
3.- EXPÉRIMENTATION	85
4.- CONCLUSION DES ESSAIS	86
CONCLUSION	87
TABLEAUX	89
BIBLIOGRAPHIE	90

NOTATIONS

x, y, z, u	Coordonnées d'espace.
η, ξ, Z	Coordonnées auxiliaires.
r, ρ	Rayons.
S	Surface.
n	Direction normale à une surface.
L, M	Longueurs de référence.
N	Longueur réduite.
t	Temps.

Quantités thermiques.

Q	Quantité de chaleur.
T	Température.
Φ	Flux.
θ	Température réduite.
λ	Conductibilité calorifique.
c	Chaleur spécifique.
ρ	Masse spécifique.
a	Diffusivité.
h	Coefficient de passage calorifique global.
P	Puissance calorifique spécifique.
m	Résistance de surface réduite.
G	Gradient thermique.
g	Gradient réduit.
σ	Limite de résistance à la rupture.
χ, τ	Temps réduits.

Quantités électriques.

q	Quantité d'électricité.
V, v, u	Potentiels.
I, i	Courants.
γ	Conductibilité.
σ	Résistivité à deux dimensions.
r_0	Résistance par unité de longueur.
c_0	Capacité par unité de longueur.
R, ρ, P	Résistances et potentiomètres.
F, C, H	Conductances de réseau diagonal.
C, Γ	Capacités.
L	Self-Inductance.
f	Fréquence.
τ	Temps réduit.
n	nombre de sections.
K	Constante de temps.
A, B, α, β, μ	Coefficients.

Quantités élastiques.

σ	Contrainte.
ϵ	Déformation élastique.
E	Module d'élasticité.
η	Coefficient de frottement.

Divers.

S, H, V, B	Numéros des balais du contacteur et signaux correspondants.
γ	Rapport des vitesses du contacteur.
A	Réponse à un signal unité.
V	Réponse à un signal U .
L_n	Logarithme népérien.
e	Base des logarithmes népériens.
ϵ, E	Erreurs.

SOMMAIRE

Cette publication décrit un nouvel analyseur analogique de régimes transitoires, en particulier phénomènes calorifiques variables. Il comporte des réseaux à résistances et capacités de valeurs très petites, ce qui permet de répéter périodiquement les signaux et de les enregistrer avec une erreur de quelques millièmes par une méthode de zéro spéciale. Ces réseaux, dont on donne le calcul, sont facilement transformables et accessibles, de faibles poids, encombrement et prix et d'un grand nombre de mailles. Après l'appareillage, ses réglages et ses vérifications, on décrit une étude de choc thermique et une étude sur l'élasticité visqueuse.



INTRODUCTION

Les phénomènes calorifiques variables sont actuellement étudiés par un certain nombre de méthodes qu'il est possible de classer en trois grandes familles qui sont : les méthodes mathématiques, les méthodes expérimentales et enfin les méthodes analogiques.

L'objet du présent travail a été le projet, la réalisation et l'expérimentation d'un appareil analogique nouveau, appelé Analyseur de Régimes Transitoires, et destiné à l'étude des phénomènes thermiques variables.

Tel qu'il a été conçu, cet appareil peut cependant servir à expérimenter, dans bien d'autres domaines, de nombreux problèmes de régimes transitoires. Dans un premier chapitre, je montre ce que le principe des Analogies électriques peut apporter, avec l'aide de méthodes diverses, à l'étude des phénomènes thermiques en examinant plus spécialement dans quelles voies ont été résolus jusqu'à présent les problèmes posés par la construction d'appareillages analogiques destinés à l'étude des phénomènes calorifiques transitoires. Je décris le développement de machines diverses et plus ou moins importantes, qui se sont inspirées du principe de base du réseau à résistances et capacités de L.C. BEUKEN et j'en souligne les caractéristiques principales, les avantages et les inconvénients qui m'ont amené à orienter les présentes recherches dans une voie différente.

Le Chapitre II expose ensuite le projet et la réalisation du nouvel analyseur de régimes transitoires.

Les idées directrices consistent, dans leurs grandes lignes, à utiliser, pour constituer les réseaux, des éléments usuels en radio-électricité, à étudier leur comportement sous l'action d'un échelon unité fournie par un circuit d'un contacteur tournant et à relever les courbes de réponse en fonction du temps sans aucune distorsion, par une méthode de zéro, au moyen de tensions étalonnées commutées aussi par le contacteur.

La description complète de l'analyseur est suivie de celle de son fonctionnement et de ses réglages.

Le Chapitre III est réservé à l'étude détaillée de la construction des réseaux à résistances et capacités représentant les corps étudiés : influence des mailles qui les composent et influence propre de chacun de leurs éléments.

J'ai ainsi examiné les divers réseaux uni-dimensionnels et bi ou tri-dimensionnels en usage et approfondi certaines de leurs propriétés.

Plusieurs sortes de phénomènes thermiques transitoires ont donné lieu à des calculs théoriques et peuvent être représentés par des abaques. Je me suis servi de ces résultats, dans le Chapitre IV, pour vérifier à la fois mon appareillage et les théories de construction des réseaux : la précision ainsi obtenue a été excellente.

A titre d'application, le Chapitre V rend compte d'une étude complète de choc thermique dans une éprouvette prismatique. J'y ai exposé, en particulier, les résultats concernant les variations de température, gradient, flux thermique en fonction du temps, champs d'isothermes correspondant à des instants donnés, et influence finale de la pénétration du choc thermique.

On trouvera, enfin, au Chapitre VI une étude de l'élasticité visqueuse dans les hauts polymères. La description des analogies correspondant au fluage et à la relaxation y est suivie de résultats expérimentaux donnant certaines caractéristiques du matériau étudié.

On se trouve donc être en possession d'un appareillage permettant, d'une manière rapide, simple et peu coûteuse, l'étude de nombreux problèmes de régimes transitoires, en particulier des phénomènes calorifiques variables.

Je tiens à souligner que ce travail a été effectué au Laboratoire d'Analogies Electriques de l'O.N.E.R.A. et à remercier respectueusement son Directeur, Monsieur le Professeur Maurice ROY, Membre de l'Institut, de la bienveillance avec laquelle il en a autorisé la publication.

Je ne saurais oublier de dire toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Joseph PÉRÈS, Membre de l'Institut, qui a bien voulu orienter mes travaux jusqu'à leur aboutissement.

J'adresse également mes remerciements les plus sincères à Monsieur le Professeur Lucien MALAVARD pour la bienveillance avec laquelle il a sans cesse guidé mes recherches et pour la confiance qu'il m'a toujours accordée.

Monsieur le Professeur Gustave RIBAUD, Membre de l'Institut, et Monsieur le Professeur Edmond BRUN ont bien voulu s'intéresser à mes travaux ; je les prie d'accepter mes plus vifs remerciements.



I - MÉTHODES ANALOGIQUES UTILISÉES DANS L'ÉTUDE DE LA CHALEUR

1.- ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA CHALEUR.

L'équation de la chaleur fut proposée par FOURIER sous forme différentielle. On sait que la quantité de chaleur δQ passant à travers une surface δS à la température T pendant le temps δt est donnée par l'expression :

$$(1) \quad \delta Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \delta S \cdot \delta t,$$

où les distances n sont comptées suivant la normale à δS et où λ désigne la conductibilité calorifique au point et dans la direction envisagée.

La première analogie entre la chaleur et l'électricité fut sans doute la transcription de cette loi par Ohm dans le domaine de la conduction électrique :

$$(2) \quad \delta q = -\gamma \frac{\partial V}{\partial n} \cdot \delta S \cdot \delta t,$$

où q , V et γ sont les quantités analogues à celles de l'équation (1), respectivement quantité d'électricité, potentiel et conductibilité électriques.

Dans un corps présentant en chaque point une chaleur spécifique c et une masse spécifique ρ , la distribution de la température le long d'un axe Ox est régie, dans le cas du phénomène uni-dimensionnel, par l'équation bien connue, [1] :

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -P,$$

où P est la puissance calorifique par unité de volume qui apparaît au point donné (effet JOULE, rayonnement absorbé, combustion ou autre réaction) ; λ est la conductibilité calorifique dans la direction Ox .

Si λ est fonction de la température, donc de x par l'intermédiaire de la température, on peut écrire :

$$(4) \quad \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{d\lambda}{dT} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -P.$$

Si le milieu est isotrope et que l'on passe à trois dimensions, on aura :

$$(5) \quad \text{div} (\lambda \text{ grad } T) - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -P$$

d'où

$$(6) \quad \lambda \Delta^2 T + \frac{d\lambda}{dT} (\text{grad } T)^2 - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -P$$

et si λ est constant :

$$(7) \quad \lambda \Delta^2 T - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -P.$$

Ce sont des équations des types (5) et (7) qui sont souvent résolues par les machines analogiques à l'aide de techniques diverses : elles peuvent bien entendu concerner d'autres problèmes que la transmission de la chaleur.

L'équation (6) se réduit à une forme plus simple dans tous les cas où l'on a :

$$(8) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial T} (\text{grad } T)^2 \ll \lambda \Delta^2 T$$

c'est-à-dire pratiquement dans la grande majorité des cas, sauf pendant les premiers temps de la trempe d'un corps (ou d'un phénomène qui s'y rattacherait) [2].

On a alors :

$$(9) \quad \lambda \Delta^2 T - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -P.$$

De nombreux procédés de calcul permettent de tenir compte de la variation de λ . L'un d'eux est immédiatement applicable à l'analogie électrique dans le cas de variations qui ne sont pas trop rapides [2, 3]. Considérons un corps pour lequel l'équation (9) est satisfaite. Supposons que la puissance P soit nulle et écrivons :

$$(10) \quad \Delta^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec $a = \lambda / c \rho$, diffusivité, fonction de T .

Admettons de plus qu'à chaque instant la répartition des températures T dans tout le corps s'étende sur une échelle dans laquelle les variations correspondantes de la diffusivité $a(T)$ soient assez faibles pour amener à définir une température moyenne $\bar{T}$ et en conséquence un temps réduit τ défini par :

$$(11) \quad d\tau = \frac{a(\bar{T}) dt}{L^2}$$

et entraînant une échelle des temps distordue :

$$(12) \quad \tau = \frac{1}{L^2} \int_0^t a(\bar{T}) dt$$

L étant une longueur de référence prise pour unité, τ est sans dimension.

L'équation (10) s'écrit en conséquence :

$$(13) \quad \Delta^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau}.$$

Le flux dans l'échelle distordue τ devient exactement similaire au flux avec diffusivité constante dans l'échelle des temps ordinaires : on conçoit qu'il suffira d'introduire cette distorsion dans une machine analogique, et de rétablir ensuite l'échelle véritable.

La diffusivité instantanée $a(\bar{T})$ n'est en principe pas connue en fonction du temps avant que la solution ne soit explicitée : on procédera par approximations successives, la relation en τ et t étant construite d'après (12). On peut parfois simplifier en prenant pour $\bar{T}$ une température connue (température de surface par exemple).

De toute façon, cette solution est beaucoup plus précise que celle qui consiste à prendre a constant pendant toute la durée du phénomène.

Si les équations ne dépendent pas du temps, on se trouve en présence de régimes établis représentés respectivement par les équations :

$$(14) \quad \text{div} (\lambda \text{ grad } T) = -P$$

$$(15) \quad \lambda \Delta^2 T = -P.$$

De tels problèmes stationnaires sont couramment résolus à l'aide de la cuve rhéoelectrique ou du réseau de conductances. L'équation type résolue par ces deux méthodes d'analogies électriques, en ce qui concerne un potentiel établi T de nature quelconque, est :

$$(16) \quad \text{div } \lambda (\text{grad } T) = P(x, y, z, t).$$

D'autres équations peuvent, dans certains cas, être ramenées à ce type [4].

2.- LES CHAMPS CALORIFIQUES STATIONNAIRES.

L'étude d'un phénomène thermique variable nécessite souvent, pour être complète, la connaissance du champ stationnaire qui représente la répartition finale ou initiale des températures et des flux dans l'ensemble envisagé.

Une récente publication [5] a donné des exemples d'application de la méthode de la cuve rhéoelectrique.

Considérons l'équation (16) :

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = P(x, y, z, T)$$

λ peut dépendre de plusieurs paramètres. Il peut être une fonction de T , donc de x, y, z par l'intermédiaire de T ; il peut aussi être une fonction directe de x, y, z ; on peut souvent, en procédant par approximations successives, ramener le premier cas au deuxième.

En raison des difficultés de faire varier λ , l'équation résolue à la cuve à trois dimensions est pratiquement toujours de la forme :

$$(17) \quad \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = 0$$

soit

$$(18) \quad \Delta^2 T = 0.$$

L'étude des champs bi-dimensionnels est, par contre, entreprise au bassin rhéoelectrique avec de nombreuses possibilités. On connaît surtout la représentation de deux champs orthogonaux (isothermes et lignes de flux) par deux analogies complémentaires obtenues en permutant les contours isolants et conducteurs.

L'introduction des conductibilités thermiques λ variables d'un point à un autre, ainsi que celle des discontinuités et des anisotropies de λ se fait aisément par des procédés connus. La mesure des gradients a été réalisée avec précision [4, 6, 7].

Le procédé simple, rapide et économique du papier conducteur Télédeltos permet, d'autre part, de représenter des champs stationnaires à deux dimensions et a déjà fait l'objet de communications [5, 8]. Il est envisagé une étude de son utilisation dans certaines conditions pour la détermination des régimes calorifiques transitoires.

Enfin, la méthode du réseau de conductances a fait l'objet de nombreux travaux de la part d'auteurs russes et anglo-saxons. On peut en trouver la description et des applications récentes dans certaines publications [9, 10, 11, 12, 13].

Elle présente les avantages suivants :

- 1°) permettre la représentation rapide et facilement modifiable, en chaque point et dans toute direction, d'une conductibilité calorifique quelconque ;
- 2°) permettre, en serrant les mailles, d'augmenter la précision des mesures dans les zones intéressantes du champ ;
- 3°) se prêter facilement à l'alimentation des noeuds, c'est-à-dire à l'introduction du terme P des équations précédentes dans des modèles à deux ou trois dimensions.

Nous retrouverons ces avantages quand l'adjonction de capacités branchées aux noeuds donnera un réseau permettant l'étude des phénomènes transitoires.

Le réseau de conductances a récemment fait l'objet de nouvelles applications [5, 14].

3.- LES TECHNIQUES ANALOGIQUES D'ÉTUDE DES RÉGIMES TRANSITOIRES.

Les analogies électriques permettent mieux que tout autre l'étude d'un très grand nombre de problèmes dans des domaines variés. Il est intéressant de remarquer que l'idée d'analogie électrique est parfois naturellement contenue dans des études à base expérimentale : par

exemple, l'assimilation d'un four à un dispositif caractérisé par une ou deux constantes de temps fait intervenir la notion de constantes localisées, si courante en électricité [15,16].

Les méthodes d'investigations analogiques sont très diverses, qu'elles soient dévolues à l'étude des phénomènes stationnaires ou des phénomènes variables. De nombreux exposés ont déjà donné le principe et la description des diverses machines à calculer, arithmétiques ou analogiques.

Dans le cas particulier de la représentation géométrique d'un corps par la cuve rhéoelectrique, ou même par un réseau de résistances, on établit des correspondances analogiques pour l'espace et pour d'autres variables, uniquement en régime stationnaire. Il existe par contre des appareillages pouvant servir, en régime établi comme en régime transitoire, à expérimenter soit un réseau analogiquement semblable à un modèle étudié, soit des circuits représentant uniquement un système d'équations : par exemple le calculateur du California Institute of Technology [17,18]. En ce qui concerne les problèmes de régimes transitoires de chaleur, la représentation des corps qui y sont soumis par des réseaux de résistances et de capacités s'est imposée successivement depuis qu'en 1934 L. BEUKEN, de l'Institut de Maastricht, en a jeté les principales bases théoriques et expérimentales. Dans cette analogie directe, les équations aux dérivées partielles deviennent équations aux différences finies en ce qui concerne les variables d'espace. Cela est dû au morcellement du réseau en mailles de longueur finie dont le nombre est fonction de la précision désirée.

La variable temps dans le phénomène thermique devient ici un simple multiple du temps dans l'analogie, la température est proportionnelle au potentiel électrique et le flux de chaleur au courant traversant le contour correspondant. Basés sur cette méthode, de nombreux appareillages ont été construits à l'étranger, dont certains sont considérables. Ce sont les grandes machines analogiques. Nous devons en dégager les principales caractéristiques en nous référant aux publications originales ; nous citerons, le cas échéant, les adaptations qui ont pu en être faites et insérées dans des articles en langue française.

Il faut noter que ce type d'analogie n'est pas le seul utilisable en ce qui concerne les régimes transitoires thermiques. En particulier, le temps peut très bien être représenté dans l'analogie par une variable spatiale [17,19], ou même une variable spatiale par le temps [20].

4.- CARACTÉRISTIQUES DES PRINCIPALES MACHINES ANALOGIQUES.

On peut constater que jusqu'à présent la technique des diverses réalisations dérive du premier modèle de L. BEUKEN [21,22,23,24,25]. Le corps à représenter est caractérisé par une diffusivité $a = \lambda / c \rho$ et le modèle à résistances capacités RC possède, quel que soit le nombre de mailles qui le compose, deux caractéristiques r_0 et c_0 qui en sont les éléments par unité de longueur du corps original.

L'équation de la propagation dans un câble électrique présentant ces éléments r_0 et c_0 est :

$$(19) \quad \frac{1}{r_0 c_0} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

La comparaison avec l'équation (3) de la propagation de la chaleur suivant un axe :

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -P$$

qui peut s'écrire, avec $P=0$ et λ constant :

$$(21) \quad \frac{\lambda}{c \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

montre que la quantité :

$$(22) \quad \frac{\lambda}{c \rho} r_0 c_0 = a r_0 c_0$$

définira le rapport des temps : temps dans l'analogie sur temps dans le phénomène thermique. Ce facteur joue un rôle essentiel dans cette analogie ; en effet, pour un phénomène thermique donné il indique la valeur des éléments, résistances et capacités, à employer en fonction et proportionnellement à la durée de l'expérimentation analogique. Cette durée dépend par ailleurs de la nature de l'appareillage électrique qui doit fonctionner conjointement avec le réseau à résistances et capacités.

Or, depuis le début de l'exploitation de ces analogies, on a surtout employé des techniques nécessitant des temps d'expérimentation relativement longs, d'où l'obligation de constituer les modèles par des éléments résistances et capacités de fortes valeurs. Le procédé de L. BEUKEN consiste à imposer à la frontière du réseau (représentant la surface du corps) une tension (température) ou un courant (flux de chaleur) variable en fonction du temps selon la loi du phénomène thermique auquel est soumis ce corps. On y arrive par une variation (manuelle ou automatique) d'organes de réglage déterminés (rhéostats, potentiomètres, commutateurs à plots, générateurs de courants et de tensions, fonctions arbitraires de la variable temps...) qui reproduisent, aussi fidèlement que possible, les variations des conditions aux limites. En même temps de nombreux appareils enregistreurs indépendants rendent compte de l'évolution de la distribution en chaque point désiré du modèle, inscrivant en fonction du temps les courbes des grandeurs correspondantes.

Dans ces conditions, les rapports temps thermique sur temps électrique de l'analogie sont donnés par divers utilisateurs comme étant de l'ordre de deux cents pour des cas courants, les expériences analogiques pouvant durer plusieurs minutes.

En conséquence, pour réaliser de telles constantes de temps, ces grandes machines doivent être équipées avec des résistances et des capacités de forte valeur, qui se chiffrent pratiquement par mégohms et par dizaines de microfarads.

Il en résulte quelques inconvénients majeurs que nous allons discuter pour montrer ensuite qu'il est possible de les éviter.

- 1°) De tels éléments, surtout les capacités, posent d'importants problèmes d'encombrement et de manipulation lorsqu'ils doivent être ajustés et mis en place lors de la construction d'un modèle. C'est ce qui a amené les utilisateurs à les placer définitivement sur de grands panneaux muraux, par exemple, et à prévoir les réglages en constituant chaque résistance ou capacité par plusieurs décades. D'où l'aspect de véritables usines que donnent ces murs tapissés de circuits. Ces éléments doivent être réunis entre eux et aux divers appareils par des réseaux de connexion auxquels ils sont branchés en fonction du schéma à réaliser.

Dans ces conditions, le nombre de noeuds réalisables ne peut être élevé et certaines applications à des phénomènes à deux et surtout à trois dimensions restent de ce fait très limitées.

- 2°) La structure de ces ensembles, comprenant des kilomètres de fils et la valeur élevée des éléments RC exigent des isolements considérables des capacités et des connexions. C'est ainsi que la machine construite à l'Université de Columbia par V. PASCHKIS, continuateur des travaux de BEUKEN, nécessite des condensateurs isolés à 15 000 mégohms par microfarad, et l'ensemble du réseau des connexions présente une résistance de perte de 150 mégohms dans le cas le plus favorable d'un air très sec [22, 25, 26, 27, 28].

- 3°) Les tensions ou courants variables qui sont injectés aux bornes du réseau au cours de l'expérimentation par des appareils divers, ne peuvent représenter les conditions thermiques imposées qu'avec une certaine approximation : les générateurs de fonctions arbitraires du temps devant soit recevoir un certain programme avant l'essai, soit être manoeuvrés suivant une certaine loi au cours de l'essai. Les appareils de lecture et d'enregistrement sont nombreux (autant que de points de mesure retenus et indépendants les uns des autres : ils peuvent donc présenter leurs erreurs propres et le cas échéant amener par leur présence une légère pertur-

bation dans les circuits où ils sont branchés. Tous ces appareillages doivent être protégés contre les variations de tension d'alimentation [21, 29, 30, 31, 32].

- 4°) Enfin, on ne peut passer sous silence le prix considérable de construction, entretien, fonctionnement de telles installations, qui ne peuvent être amorties qu'au bout d'un temps considérable et nécessitent en permanence un certain nombre d'expérimentateurs spécialisés dans les essais et la détection des erreurs et des pannes.

Il faut en contre-partie, reconnaître à ces grandes machines des possibilités étendues en ce qui concerne non seulement la résolution de la majorité des problèmes thermiques pouvant se présenter dans la pratique, mais aussi un vaste champ d'expérimentation.

La description des appareillages utilisés dans ces machines analogiques et de leurs applications ont fait l'objet de nombreuses publications. Nous donnerons donc seulement ci-dessous une liste de références qui concernent les plus utilisés à titre d'exemple : générateurs de fonctions arbitraires d'une variable dépendante ou indépendante, amplificateurs, intégrateurs et multiplicateurs électroniques divers, enregistreurs galvanométriques ou oscillographiques [3, 17, 18, 21 à 49].

5.-LES PETITES MACHINES SPÉCIALISÉES.

A l'opposé des grandes machines, certaines réalisations n'effectuent qu'un type d'étude bien déterminé et comprennent par ce fait un matériel réduit.

On peut citer, par exemple, un petit analyseur analogique construit à Manchester pour étudier la solidification et le refroidissement des lingots dans leur moule. Cet appareil, qui ne comprend que quelques circuits, est du reste utilisé conjointement avec l'analyseur mécanique de Manchester, l'expérimentation directe et l'analyse mathématique [2, 3, 22, 25, 35].

On peut citer également : des calculateurs pour les transferts de chaleur dans les récupérateurs [20, 37, 38], pour les températures transitoires dans les câbles électriques [39], pour le dégivrage périodique des hélices par résistances chauffantes [40], etc...

Notons enfin qu'un remarquable travail théorique concernant les régimes transitoires dans un câble morcelé et les diverses erreurs dues à la constitution du réseau correspondant a été appliqué par son auteur à la construction de plusieurs modèles avec des éléments de petites dimensions. Il semble cependant que les générateurs de fonctions d'entrée diverses et la méthode de relevé des courbes de réponse utilisés sont trop simplifiés pour donner toute la précision que l'on peut obtenir d'un réseau convenablement calculé [29, 30].



II - PRINCIPE ET RÉALISATION DU NOUVEL ANALYSEUR DE RÉGIMES TRANSITOIRES

1.-PRINCIPE.

Nous nous sommes trouvés devant deux exemples de réalisations : d'une part les grandes machines, trop encombrantes et coûteuses, d'autre part les petites machines spécialisées, munies d'un équipement sommaire ou imprécis et trop limitées dans leurs champs d'application.

Trois idées directrices ont guidé nos travaux ; elles se trouvent déjà dans une note intérieure parue en 1950 :

- 1°) Se servir d'éléments résistances et capacités de *valeurs usuelles* en radio-électricité.

Ces éléments peuvent aussi exister ou être ajustés avec la précision désirable et peuvent présenter par ailleurs les avantages de faibles encombrement et poids, d'où la possibilité de monter des réseaux "sur table", soit en les soudant "en l'air" au-dessus d'une plaque métallique formant masse, soit en connectant séparément les éléments sur une mince plaque d'isolant au moyen de fiches diverses. Dans un cas comme dans l'autre on obtient ainsi un réseau compact, peu encombrant, facilement modifiable et accessible, parfaitement isolé et d'un prix très abordable.

- 2°) Choisir comme fonction du temps une *brusque variation de température* représentée par une brusque élévation de la tension appliquée au réseau étudié (Echelon unité d'Heaviside). En effet, en dehors du fait que de nombreux problèmes thermiques transitoires se ramènent à l'étude d'une élévation subite de température, le calcul donne immédiatement pour la quasi-totalité des cas pratiques, les relations existant entre la réponse d'un réseau soumis à un signal unité, un signal quelconque et la réponse à ce dernier. Le relevé de la réponse au signal unité, donné aisément par l'analyseur en fonction du temps, permet d'utiliser des procédés de calcul numérique simples qui fournissent la réponse V à un signal U quand on connaît la réponse A à un signal unité ou, inversement, le signal extérieur U qui a provoqué une réponse V , relevée expérimentalement, par exemple par un thermo-couple placé en un point accessible. La réponse A étant relevée analogiquement et étant nulle au temps zéro, on sait que :

$$(23) \quad V = U * \frac{\partial A}{\partial t}$$

le signe * indiquant un produit de composition.

Si, à une surface S , c'est un flux donné :

$$(24) \quad \Phi(t) = -\lambda \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_s . S$$

que l'on impose, la formule suivante permet de trouver le signal U qui aurait donné ce flux, alors que le signal unité venant du même endroit aurait donné un flux : $-\lambda \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_s . S$, déterminé par l'analogie :

$$(25) \quad \int_0^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_s dt = U * \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_s .$$

Connaissant U , la formule (23) donne alors, pour tout point voulu, les réponses V corres-

pendant au flux $\bar{\Phi}(t)$ imposé.

La précision ne dépend que du nombre de points pris sur l'échelle des temps, et l'analyseur en fournit autant que l'on veut [29, 50].

- 3°) Profiter du fait que le signal unité appliqué au réseau est d'une extrême simplicité (potentiel d'entrée variant brusquement de zéro à une tension fixe) pour l'imposer avec exactitude et pour *référer toutes les mesures* à cette tension, en obtenant ainsi des résultats simplement exprimés et absolument exempts de toute erreur provenant d'une variation accidentelle de tension d'alimentation (erreur sur le signal d'entrée) ou d'une imperfection d'un appareil de mesure ou d'enregistrement (erreur sur le relevé de la réponse).

Les valeurs utilisées pour les résistances et capacités permettent l'emploi d'un appareillage à faible constante de temps et vont de pair avec l'idée d'une répétition périodique du phénomène transitoire et de l'observation d'un résultat rendu fixe par ce procédé. A cette observation, se prête au mieux un tube cathodique à écran rémanent, à condition d'éliminer toutes les distorsions possibles.

Il restait à découvrir le moyen d'imposer à l'entrée du réseau, dans des conditions bien précises, un signal unité rigoureusement constant et de relever au point voulu de ce réseau, la tension de réponse en fonction du temps, dans les conditions que nous avons dites. Pour atteindre ces deux buts avec toute la précision désirable nous avons choisi un commutateur rotatif comme pouvant seul assurer simplement une application transitoire instantanée et sans dérive d'un signal unité rigoureux à partir d'une tension continue constante.

La répétition périodique du phénomène transitoire exige que l'on se retrouve dans les mêmes conditions initiales au début de chaque période, en l'occurrence que tout le réseau soit complètement déchargé avant chaque nouvelle imposition du signal unité. Or, à moins de complications de matériel inacceptables, il n'est pas possible pour un réseau quelconque de court-circuiter chaque noeud aux fins de décharges entre chaque cycle. Nous avons donc choisi d'envoyer à la fin de la phase utile d'observation un signal égal et de signe contraire au même point, c'est-à-dire pratiquement de court-circuiter l'entrée du réseau.

Il faut déterminer quelle doit être dans ces conditions la durée de cette phase de décharge par rapport à la phase utile de charge. Elle doit être au moins égale, et en pratique beaucoup plus grande. En effet, le signal unité de charge doit durer assez longtemps pour que la courbe de réponse relevée au point voulu du réseau approche aussi près qu'il est utile de son asymptote, qui est la valeur atteinte en régime établi, facilement connue.

Ce temps d'application varie avec la section choisie et si l'on étudie un corps tant soit peu compliqué, il est bien difficile de le préciser a priori : on ne parvient à déterminer la valeur qui convient à chaque endroit du réseau qu'en examinant la position de la courbe de réponse par rapport à son asymptote. De ce fait, pratiquement, on interrompt la charge alors que certains points n'ont pas encore entièrement atteint leur état de régime établi. Une période de décharge d'une durée égale serait donc trop courte pour faire revenir tous les points du réseau aux conditions initiales, c'est-à-dire à un potentiel nul et la mesure n'aurait plus aucun sens.

Un rapport plus grand des deux périodes est donc nécessaire. Il a été déterminé par une expérience préliminaire effectuée sur un réseau figurant un mur plan partagé en douze sections égales, présentant une face isolée et l'autre face soumise à une suite continue de charges et de décharges dans un rapport de durées respectives variables.

L'appareil utilisé comprenait un moteur à vitesse variable d'une façon continue entraînant les curseurs d'un contacteur et d'un potentiomètre. Le contacteur présentait une série de plots pouvant être réunis en deux groupes suivant un rapport variable pour représenter les deux phases du cycle et le potentiomètre fournissant pendant tout le cycle une tension croissant linéairement en dents de scie pour servir au balayage horizontal d'un tube oscillographique.

Les plaques verticales de ce dernier étaient directement reliées au point voulu du réseau pour y prendre la courbe du potentiel en fonction du temps.

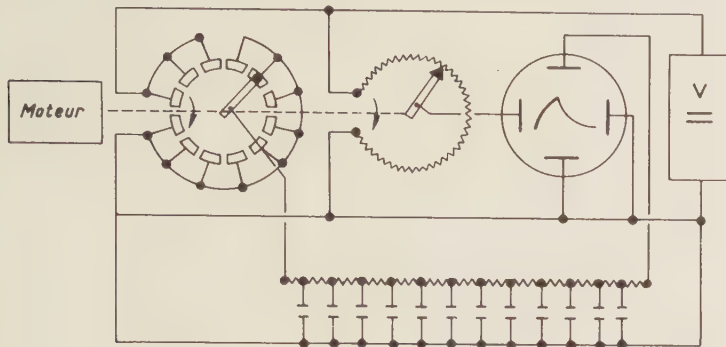


Fig. 1

Pratiquement cette expérience est suffisante, ce mur représentant un cas difficile en ce qui concerne le retour au potentiel zéro des sections les plus éloignées de l'entrée du réseau. La figure 1 en donne le schéma de principe et les figures 2 et 3 montrent à titre d'exemple l'aspect de deux courbes observées quand la période de charge dure la moitié du cycle total (fig. 2,

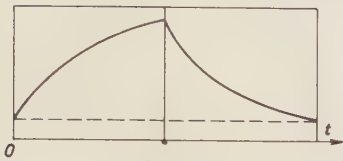


Fig. 2

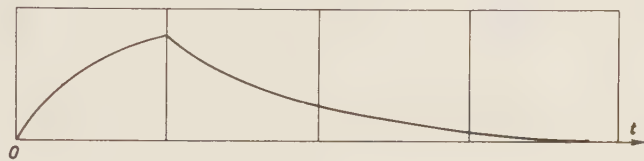


Fig. 3

égalité avec la période de décharge) ou quand elle ne dure que le quart du cycle total (fig. 3, le tiers de la période de décharge). Dans les deux cas, on a fait durer la période utile de charge le même temps, le moteur tournant deux fois plus vite pour le premier. On voit pour celui-ci que le point exploré ne revient pas – donc ne repart pas – du potentiel zéro, la courbe observée est sans valeur aucune. Les deux graphiques comportent des axes temps, tension et asymptotes identiques.

En tenant compte du fait que le rapport des deux périodes devait être un nombre simple pour des facilités de construction du contacteur définitif qui était prévu beaucoup plus compliqué, on a pu vérifier par l'expérience que le rapport un quart de la durée de charge au cycle total était justifié et de plus très pratique, et il a été adopté dans le projet définitif de 1950 (note technique O.N.E.R.A. non publiée).

Enfin, notre but d'éliminer toute erreur dans le relevé de la courbe de réponse a été atteint en se basant sur les considérations suivantes :

– 1^o) Application *directe* des signaux aux plaques du tube cathodique rémanent, de façon à éliminer toutes les distorsions de phase ou d'amplitude des amplificateurs ainsi que les dérives et remises à zéro.

– 2^o) Utilisation, pour obtenir une tension parfaitement *linéaire* de balayage, d'un potentiomètre spécial dont le curseur tourne en synchronisme avec le contacteur, ce qui élimine toutes les erreurs de base de temps.

– 3^o) Référencer toutes les mesures de tension ou de temps à la *même tension continue* : celle qui fournit l'échelon unité et la tension de balayage, ce qui élimine toute erreur provenant d'une variation accidentelle de cette tension unique, qui est d'ailleurs réglable.

– 4^o) Effectuer le relevé de la courbe en profitant du temps de décharge pour connecter, par une autre partie du commutateur, les plaques du tube oscillographique rémanent à des tensions étalonnées diverses produisant des signaux que l'oeil voit en même temps que la courbe et permettant de relever cette courbe en la suivant *point par point*. Cette façon d'opérer est essentielle car elle permet la synthèse de tout ce qui précède et élimine les dernières erreurs : celles provenant notamment de la distorsion éventuelle apportée à l'image par le tube cathodique

lui-même ; elle évite toutes dérives, tarages, remises à zéro et étalonnage de l'écran du tube, ce que ne saurait faire la simple observation visuelle ou photographique.

- 5°) Il est très utile d'utiliser tout le temps de la décharge en commutant sur les plaques du tube d'autres signaux (asymptotes, axes) qui précisent à l'observateur la position exacte de la courbe. Il est enfin nécessaire de se rendre compte lors de chaque essai que tout point du réseau est bien *revenu aux conditions initiales* à la fin de chaque cycle et de pouvoir observer, en conséquence, un signal rendant compte de la fin de la décharge en tout point désiré.

2.-DESCRIPTION DU CONTACTEUR TOURNANT.

a) COMMUTATEUR.

Le commutateur donnant le signal unité pendant un quart du cycle total est complété dans le projet définitif par deux autres commutateurs connectant directement l'un une plaque verticale, l'autre une plaque horizontale, du tube cathodique ; les deux plaques restantes vont à des tensions de cadrage qui ne jouent aucun rôle dans la mesure et sont d'ailleurs prélevées sur la tension d'alimentation commune. Le contacteur est représenté figure 4. Les trois commutateurs comportent des pistes tournantes situées sur le même cylindre isolant *A*. Les commutations se font régulièrement tous les quarts de tours. Les tensions sont amenées par des balais fixes *D* sur des pistes continues reliées à l'intérieur du cylindre à trois pistes coupées chacune en quatre parties, isolées les unes des autres par un petit intervalle. Les trois circuits sont complètement indépendants et les tensions sont collectées sur ces trois pistes par trois balais fixes mais dont la position est ajustable.

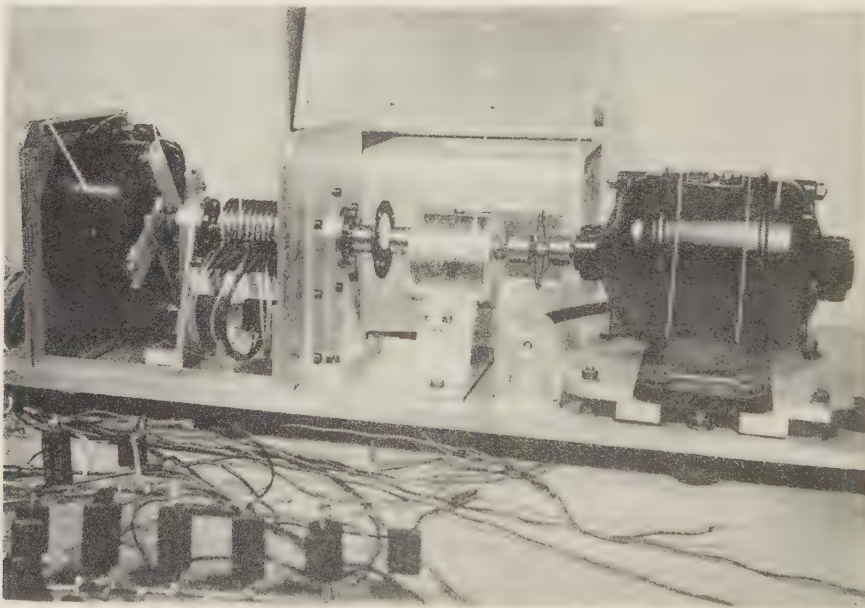


Fig. 4

Il faut remarquer que la division par quatre du cycle total n'est pas obligatoire, mais plus simple, et que d'autres combinaisons sont possibles. Le premier commutateur réalisé comprenait des pistes formées de bagues en laiton encastrées dans un cylindre de céloron, et sur lesquelles s'appuyaient des balais en fil de platine, étant donné la très faible intensité des courants en jeu.

Le céloron s'étant avéré à l'usage un mauvais isolant pour ce commutateur, des essais

furent repris, dans des conditions très dures, pour ne laisser place à aucune surprise lors de l'emploi du commutateur définitif, en vue de déterminer la meilleure matière. Le plexiglass s'avéra supérieur et le nouveau cylindre A_1 présente toutes les garanties nécessaires. Il est d'ailleurs légèrement simplifié en laissant la continuité entre les fractions de pistes interrompues devant se trouver continuellement au même potentiel (figure 5). A l'occasion de cette transformation le jeu de balais fut refait et perfectionné en employant des fractions de balais en fils multiples pour télégraphe automatique Baudot, D_1 , D_2 .

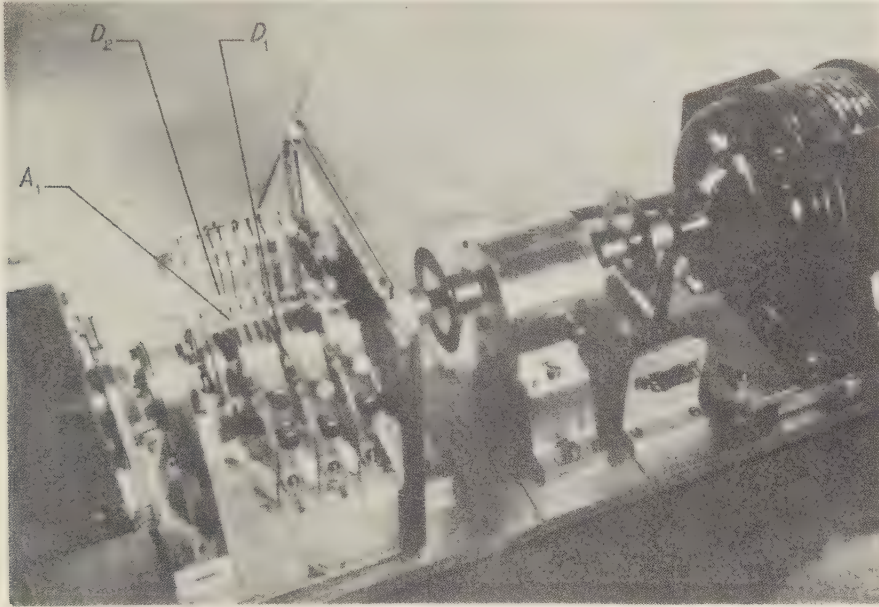


Fig. 5

Le nouvel ensemble donne entièrement satisfaction. Il présente un isolement moyen de plusieurs dizaines de milliers de mégohms et des capacités négligeables.

b) POTENTIOMÈTRE DE BALAYAGE.

Le tube cathodique doit être balayé pendant la durée de la période de charge du circuit, c'est-à-dire pratiquement en un quart du cycle total. Le curseur du potentiomètre de balayage étant monté sur le même arbre que le contacteur pour des raisons de précision, toute la tension de balayage devra être délivrée pendant un quart de tour. Pour ce faire le potentiomètre n'est bobine que sur un quart de tour et le curseur tournant frotte ensuite sur une piste isolante latérale dont les extrémités sont en pente très douce pour éviter tout choc ou rebondissements au début du bobinage. Le curseur est amené par cette piste à en aborder tangentielllement les premières spires.

Pratiquement, il faut aussi des tensions de balayage pendant les trois autres quarts du cycle et ce sont en fait quatre curseurs B , décalés de 90° , qui frottent sur le potentiomètre permettant ainsi la production d'une variation de potentiel en dents de scie sans interruption, mais dont seule la première demande à être réglée dans le temps avec précision. Il n'en reste pas moins vrai que pour éviter un grave court-circuit des extrémités du bobinage par deux curseurs successifs, les quatre curseurs doivent être réglés séparément avec précision pour se trouver à 90° et que la partie du bobinage sur laquelle ils frottent doit faire un peu moins de 90° , ce qui d'ailleurs n'offre aucun inconvénient.

Cet ensemble a été réalisé à partir d'une carcasse de potentiomètre V. Alter 2515 de 130 mm de diamètre portant un bobinage de 25 000 ohms sur un quart de tour et dont la linéarité

a été soigneusement contrôlée. On voit le potentiomètre P et les quatre curseurs B sur la gauche des figures 4 et 5. Pour éviter tout scintillement sur l'écran du tube cathodique aux vitesses élevées, les curseurs sont réunis par des petits condensateurs aux extrémités du bobinage.

c) ENTRAÎNEMENT.

Un moteur synchrone M permet d'obtenir simplement des vitesses, donc des courbes, très stables ; il faut cependant tenir compte des petites variations accidentelles de la fréquence du secteur au cours d'un essai et pouvoir les compenser instantanément, ce qui a été résolu, comme on le verra par la suite.

Nous avons employé un moteur asynchrone synchronisé qui démarre seul et se synchronise en une fraction de seconde. Il tourne à 1 500 t : min, soit 25 t : sec.

Les premières expériences ont montré qu'il était nécessaire d'avoir une gamme assez étendue de vitesses. Nous avons donc intercalé une petite boîte de vitesses V transmettant la rotation au commutateur et au potentiomètre avec les rapports 1, 1/2, 1/4 et 1/8, soit aux vitesses de 25, 12,5, 6,25 et 3,125 t : sec, ce qui couvre amplement tous les besoins, une simple multiplication ou division par 2 de l'échelle des temps permettant de changer de vitesse au cours d'un même essai. L'utilisation des deux petites vitesses nécessite un tube cathodique à écran très rémanent P7, dont un filtre laisse voir la trace rémanente jaune en éliminant la trace instantanée bleue, très désagréable à regarder dans ces conditions.

Tous ces éléments sont montés sur une platine et alignés avec précision. Le potentiomètre et le contacteur sont recouverts, après réglages, d'un cache F avec fenêtres en plexiglass pour les protéger de la poussière. L'ensemble de la figure 5 a été construit avec une grande précision à l'O.N.E.R.A., à la division Mesures. Il a déjà longtemps servi sans aucune défaillance ; il ne nécessite pratiquement aucun entretien et donne entière satisfaction.

3.-FONCTIONNEMENT DU CONTACTEUR.

Le cycle total est divisé en quatre temps égaux numérotés de I à IV, qui se succèdent tous les quarts de tours avec un petit intervalle de séparation qui n'intervient aucunement dans la mesure. On a représenté figure 6 le développement

du cycle pour le contacteur et le potentiomètre en admettant que tous les balais et curseurs se déplacent d'un mouvement d'ensemble horizontal de gauche à droite. Le curseur B du potentiomètre P et les balais D_2 des pistes coupées S , V , H peuvent se mouvoir d'une petite quantité autour de cet alignement pour ajuster leur position relative.

L'origine des temps se place toujours au début de I et quand le balai S contacte la partie de bague correspondante. Cet instant précis est appelé t_0 et marque le début de l'imposition du signal unité à l'entrée du réseau, c'est-à-dire le départ du phénomène transitoire étudié. Le balai S est connecté à l'entrée du réseau et reçoit le signal unité par le balai S_1 pendant le temps I, pratiquement un peu moins du quart du cycle total ; c'est la phase utile de charge qui donne aux différents points du réseau les courbes de réponse à relever.

Pendant les périodes suivantes II, III, IV,

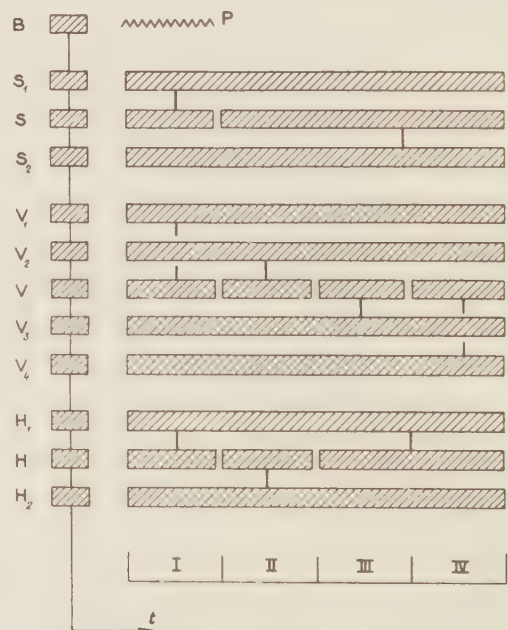


Fig. 6

S est relié à S_2 qui apporte la tension de décharge ramenant le réseau aux conditions initiales. La tension continue commune V_o qui fournit le signal unité est réglable de 0 à 400 volts. Son pôle négatif est relié aux masses des appareils et constitue le potentiel zéro du réseau. Son pôle positif est relié au balais S_1 et la masse au balai S_2 . La grandeur des tensions utilisées permet de négliger complètement les F.E.M. de contact. Les deux plaques actives du tube oscillographique sont directement reliées aux balais V et H , en évitant les pertes et les capacités dues aux connections. Quatre potentiels différents se succèdent sur la plaque verticale : V_1, V_2, V_3, V_4 , apportés par les balais correspondants. V_1 apporte la tension de réponse au point voulu du réseau produite par l'imposition à l'entrée du signal unité pendant le temps I.

V_2, V_3, V_4 sont réunis à des tensions de mesure diverses ; V_4 peut apporter la tension de fin de décharge d'un point quelconque du réseau pendant le dernier temps IV, ce qui permet de voir que l'on est bien revenu aux conditions initiales. Le balai H_1 reçoit la tension de balayage venant des quatre curseurs B et la communique à la plaque horizontale pendant les temps I, III et IV. Le balai H_2 apporte une tension de mesure pendant le temps II. Le bobinage du potentiomètre P est représenté exploré pendant le temps I par le curseur B , les trois autres curseurs répétant des tensions identiques pendant les temps suivants.

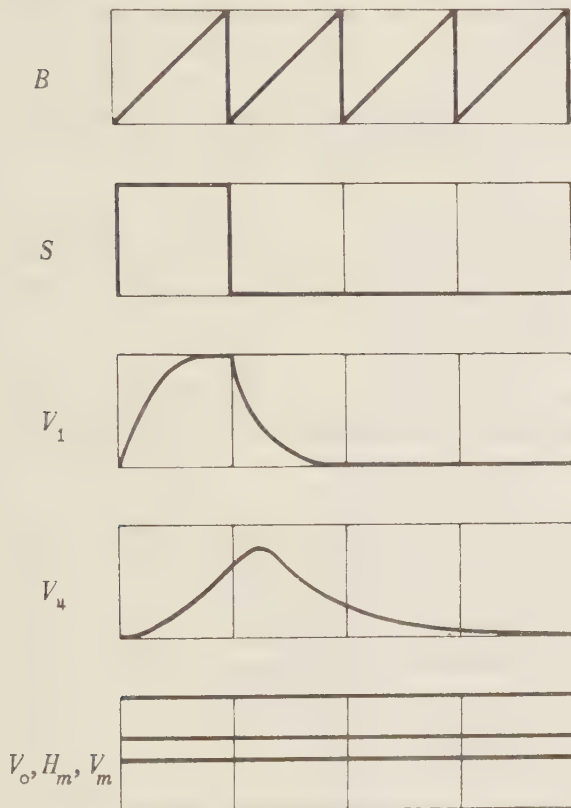


Fig. 7

Les tensions de mesure appelées V_m et H_m sont données par deux potentiomètres étalons P_v et P_h que nous supposons pour l'instant connectés entre la masse et la tension V_o . Ils sont divisés en 1 000 points et gradués par convention de 0 à 1. Leur valeur est de 10 000 ohms, répartie en trois décades. Ils délivrent pendant tout le cycle des tensions continues que l'on peut faire varier à volonté pour modifier la figure correspondante sur l'écran du tube cathodique.

La figure 7 montre l'aspect des diverses tensions pendant les quatre temps du cycle : la tension de signal S est imposée à l'entrée du réseau. On a prélevé, à titre d'exemple, V_1 près de l'entrée du réseau et V_4 en un point éloigné. H_2 est la tension continue H_m . V_2 peut être la tension continue V_m ou la tension de balayage B , V_3 peut être réunie aux potentiels continus 0, 1 ou V_m .

Dans ces conditions, on observe sur l'écran du tube cathodique diverses informations rendant compte instantanément de l'ensemble de l'essai et de l'influence propre de chacun des paramètres. Ces

figures paraissent simultanées, à cause de la rémanence de l'écran et de la persistance des impressions lumineuses et se présentent dans l'ordre suivant :

Temps I : Plaque V au potentiel V_1 et H au potentiel B . On observe sur l'écran la réponse cherchée au point voulu (fig. 8).



Fig. 8

Temps II : H réuni à H_m et V réuni, soit à V_m : on observe alors sur l'écran un point fixe de coordonnées V_m et H_m (fig. 9), soit au balayage B : on observe alors un trait vertical d'abscisse H_m (fig. 9 bis).



Fig. 9



Fig. 9 bis

Temps III : H réuni à B et V , soit à V_o (fig. 10), soit à 0 (fig. 10 bis), soit enfin à V_m (fig. 10 ter). On obtient dans les trois cas un trait horizontal d'ordonnée correspondante.



Fig. 10



Fig. 10 bis



Fig. 10 ter

Temps IV : H réuni à B et V à V_u : on observe la fin de la décharge en un point quelconque du réseau (fig. 11). On peut aussi réunir le balai V_u à une tension continue quelconque et l'on obtient l'une des figures 10.



Fig. 11



Fig. 12

Supposons, par exemple, avoir réuni sur l'écran les figures 8, 9, 10, 11. On obtient la figure 12, qui montre immédiatement que le point analysé atteint pratiquement la valeur du régime établi à la fin de la période d'observation. Une simple commutation de 10 en 10 bis donne la figure 13 qui montre de même qu'en un point choisi - qui peut être ou non le même - le circuit est complètement déchargé à la fin du cycle.



Fig. 13

Comme une seule paire de tensions peut donner au spot les mêmes coordonnées, toute la mesure va consister à déplacer le point sur la courbe au moyen des deux potentiomètres étalons P_v et P_H et de lire ainsi les coordonnées temps et température dans une échelle arbitraire de 0 à 1 sur ces potentiomètres. On peut se fixer le temps et lire la température ou inversement.



Fig. 14

Dans certains cas il est plus précis ou moins pénible pour les yeux de remplacer le point de la figure 9 par deux axes mobiles que l'on amène à se croiser orthogonalement sur la courbe : on utilise alors les traits reproduits en 9 bis et 10 ter (fig. 14).



Fig. 15

Ces commutations des signaux utilisés sont instantanées et peuvent être différentes. La figure 15 montre par exemple une autre courbe cadrée entre ses axes temps et température et son asymptote. Nous avons jusqu'ici passé sous silence un certain nombre de difficultés et de problèmes annexes qui ont amené à la réalisation d'un appareillage plus complexe, que nous allons décrire.

4.-APPAREIL DE RELEVÉ DES COURBES DE RÉPONSE.

a) CIRCUITS DE LA BASE DE TEMPS.

Admettons pour l'instant que la fréquence du secteur soit constante et égale à 50 pps. Si le commutateur et le potentiomètre tournent à 25 t : sec (boîte de vitesse sur le rapport 1), un quart de tour sera parcouru en un centième de seconde exactement. C'est cette durée que nous appelons temps de base et les temps seront mesurés pendant toute la période de charge depuis t_o du temps I et en fractions de ce temps de base. Pour les autres vitesses il suffirait de multiplier les lectures respectivement par 2, 4 ou 8 pour les vitesses 1/2, 1/4 ou 1/8. Les lectures de temps sont de ce fait rapides et simples.

Il faut remarquer tout de suite que l'observation de la période de décharge durera un peu moins d'un quart de tour puisque, par construction, d'une part la partie de piste correspondant

au signal unité dans ce commutateur est isolée de part et d'autre par des petits intervalles régulièrement espacés, et d'autre part la partie du bobinage du potentiomètre sur laquelle frottent successivement les quatre curseurs fait un peu moins de 90° . Le temps utile de réponse au signal unité sera de ce fait légèrement inférieur au temps de base et la courbe sera mesurée par des temps comptés dans une échelle très légèrement inférieure à l , ce qui n'apporte pratiquement aucun inconvénient.

Il faut, par contre, tenir compte de ces caractéristiques pour aligner la tension de mesure des temps H_m avec la tension de balayage B , toutes deux étant supposées varier linéairement en fonction du temps. D'où pratiquement deux réglages pour faire coïncider ces deux droites pour deux temps t_0 et t_1 .

Nous avons déjà posé t_0 origine des temps, c'est-à-dire l'instant où le balai S aborde la partie de la piste donnant l'échelon unité. Il est nécessaire qu'à ce moment le curseur délivrant la tension de balayage B soit déjà en contact avec les premières spires du bobinage de P pour y frotter avec une pression régulière, ce qui fait qu'il reçoit déjà un petit potentiel positif à l'instant t_0 . Le potentiel de référence H_m correspondant à t_0 et chiffré par 0 sera donc légèrement supérieur au potentiel de l'extrémité du bobinage de P . D'autre part quand le curseur atteint la fin du bobinage de P , c'est-à-dire le potentiel maximum de ce bobinage, il ne s'est pas encore écoulé le temps de base d'un quart de tour qui se chiffrerait par l pour le potentiel H_m . Le potentiel maximum de P devra donc être rendu inférieur au potentiel $H_m = l$.

La figure 16 montre le diagramme des tensions en fonction du temps correspondant au schéma de départ de la figure 17.

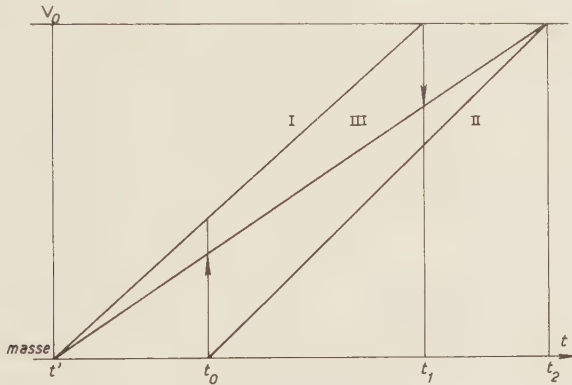


Fig. 16

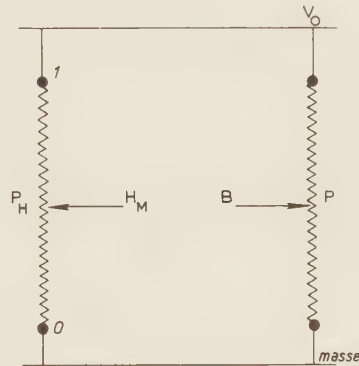


Fig. 17

La courbe I représente la montée du potentiel délivré par le curseur B qui parcourt l'échelle totale de la tension V_0 (excepté les premières spires). Elle commence avant t_0 , en t' , et finit à t_1 .

La courbe II représente le potentiel H_m attribué à chaque instant de la durée du temps de base. Elle commence à t_0 et finit à t_2 , tel que $t_2 - t_0$ soit égal au temps de base. Les deux courbes sont parallèles si le bobinage total du potentiomètre fait rigoureusement un quart de tour, ce qui n'est pas obligatoire ; l'écart entre les deux courbes a été considérablement grossi sur le dessin.

Le seul moyen d'aligner ces deux droites consiste à modifier le potentiel des extrémités des deux éléments, ce qui déplace verticalement les extrémités des droites aux temps t' , t_0 , t_1 ou t_2 . On voit tout de suite qu'il suffit d'abaisser le potentiel de P correspondant au point t_1 et d'élever le potentiel de P_H correspondant au point t_0 pour obtenir une seule droite III allant de t' à t_2 et dont seule la partie commune entre t_0 et t_1 sera utilisée.

La figure 18 montre le schéma correspondant ; deux résistances marquées ρ_0 et ρ_1 servent à cet alignement auquel on arrive, en principe, par approximations successives en faisant varier l'une après l'autre les deux résistances. En fait ce tarage, qui est fait une fois pour toutes, est pratiquement immédiat et les éléments ρ_0 et ρ_1 sont bloqués après réglage.

Nous avons jusqu'ici supposé la fréquence du secteur constante et égale à 50 pps. Il n'en est pas toujours ainsi, mais sauf de rares variations brusques, on se trouve pratiquement en présence de petites évolutions assez lentes ; ces évolutions peuvent être suivies aisément sur un fréquence-

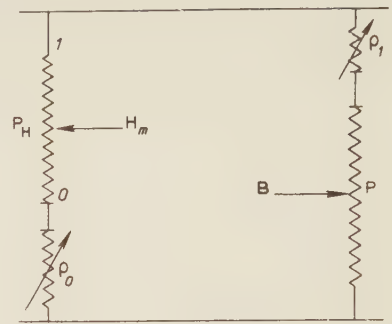


Fig. 18

mètre de précision, ce qui permet d'effectuer le cas échéant les petites corrections correspondantes sur un circuit approprié. Ce procédé simple a l'avantage d'éliminer complètement les variations de la fréquence du secteur sur l'échelle des temps ; ce moyen de procéder nous a paru préférable à l'introduction de corrections fastidieuses de cette échelle, ou à de lourds dispositifs automatiques, hors de proportion avec le but à atteindre.

Le principe du circuit correcteur est basé sur la remarque suivante : si la fréquence du secteur augmente, le balayage de l'écran du tube augmente proportionnellement sa vitesse et un point donné de la courbe de réponse va s'éloigner proportionnellement de l'origine. Pour correspondre au même temps réduit, mesuré par la graduation du potentiomètre P_H , le potentiel H_m correspondant devra augmenter proportionnellement. En d'autres termes pour une certaine variation de la fréquence du secteur, le potentiel électrique H_m compté à partir du zéro du potentiomètre P_H doit varier relativement de la même quantité pour qu'un signal d'abscisse t_m puisse rejoindre sur l'écran le point correspondant sans toucher au curseur du potentiomètre P_H . Mais ce dernier est placé en série avec la résistance correspondant à t_0 , qui a été ajustée et doit donc être parcourue par un courant constant, ce qui oblige à faire entrer P_H dans un dispositif présentant une résistance constante et donnant aux bornes de P_H une tension proportionnelle à la fréquence du secteur.

Ce circuit est représenté figure 19. Les résistances R_1 et R_2 varient simultanément pour

que la résistance totale du dipôle reste constante, donc la différence de potentiel V_t à ses bornes.

Dans ces conditions le courant I_1 doit être proportionnel à la fréquence f et ajusté en fonction de la lecture au fréquence-

$$(26) \quad \rho = \frac{(R + R_1) R_2}{R + R_1 + R_2}$$

mètre. Il sera maximum pour une fréquence maximum f_m que l'on fixera comme ne pouvant être dépassée et pour laquelle la résistance R_1 sera nulle. La résistance de l'ensemble qui doit être constante, vaut :

$$(27) \quad \rho = R.$$

On en tire, avec (26) :

$$(28) \quad R_2 = R + R^2/R_1.$$

On a vu que

$$(29) \quad I_1 = \mu_1 f = V_t / (R + R_1)$$

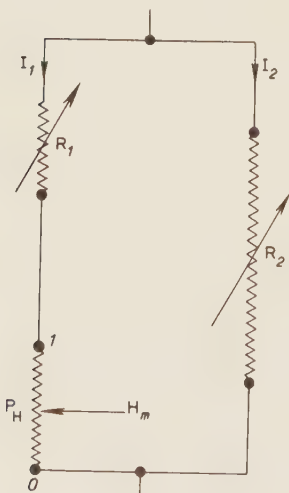


Fig. 19

d'où :

$$(30) \quad R + R_1 = \frac{\mu_2}{f}$$

et pour la fréquence maximum :

$$(31) \quad R = \frac{\mu_2}{f_m}$$

De (30) et (31) on tire :

$$(32) \quad R_1 = R \left(\frac{f_m}{f} - 1 \right)$$

et avec (28)

$$(33) \quad R_2 = R \left(\frac{f_m}{f_m - f} \right).$$

Il faut maintenant un dispositif donnant simultanément à R_1 et R_2 la valeur correspondant à une certaine fréquence suivant les courbes des figures 20 et 21. Le seul procédé pratique est de les faire varier par bonds au moyen de deux commutateurs jumelés pour un certain nombre de fréquences très rapprochées dans une zone couvrant les irrégularités du secteur. Nous utilisons un fréquencemètre à cadre mobile dont la précision est de 0,05 pps soit un millième en valeur relative. Le commutateur conjuguant R_1 et R_2 a donc été gradué tous les dixièmes de période.

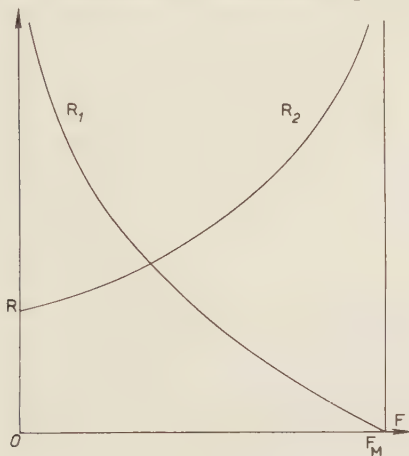


Fig. 20

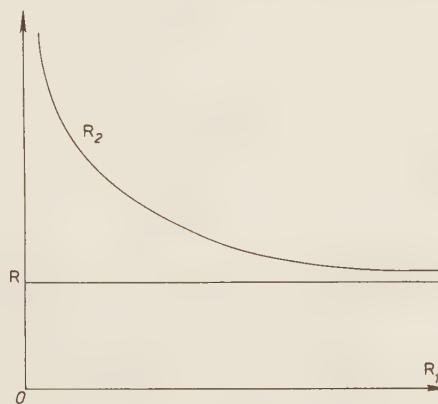


Fig. 21

La fréquence maximum utilisée dans les calculs de R_1 et R_2 est de 51 pps. Le potentiomètre P_H a une résistance $R=10\,000$ ohms. Le circuit est figuré sur le schéma de principe d'ensemble figure 22. (p. 24).

b) EXAMEN D'UNE PARTIE DE LA DÉCHARGE.

Pour certaines applications où l'on désire observer la réponse à une impulsion de durée finie à la place d'un échelon unité, on partage la période d'observation du temps I et on avance par un moyen approprié, le début de la décharge ; le temps d'observation est alors consacré dans un rapport variable au début de la réponse au signal unité, brusquement suivie à un temps t_3 de la réponse à la décharge correspondante. C'est au total la réponse à une impulsion de durée finie $t_3 - t_0$. Le temps t_3 est variable de t_0 à t_1 .

Le circuit correspondant (fig. 22) comprend un balai supplémentaire S' qui reçoit après S les signaux de la piste correspondante. Le réseau ne reçoit plus alors son signal unité directement par le balai S mais par l'intermédiaire d'un relais ultra rapide R délivrant la tension S'' .

A l'instant t_0 , le phénomène est inchangé, le relais R au repos délivre la tension S en S'' et le balai supplémentaire S' reçoit une tension nulle qui bloque l'amplificateur A commandant R .

Au temps t_3 , S' reçoit à son tour l'impulsion unité, R passe sur la position travail en un temps pratiquement négligeable et la décharge anticipée du réseau commence, observable jusqu'en t_1 . Elle continue ensuite jusqu'à la fin de la période. Ce dispositif pourrait aussi servir en cas de temps de décharge total insuffisant lors de l'utilisation de l'échelon unité.

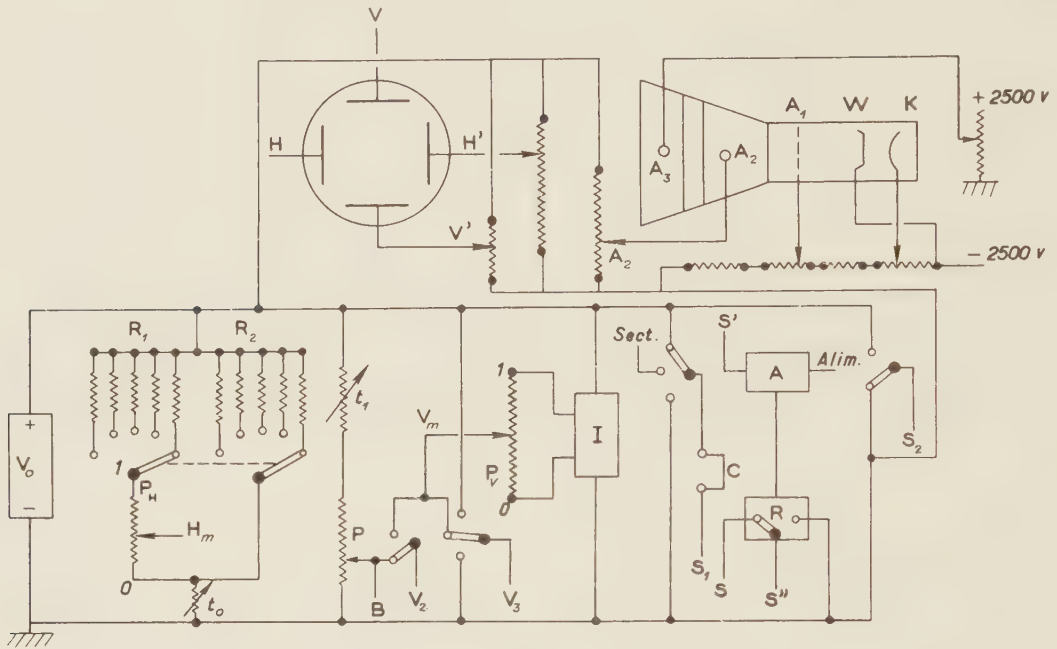


Fig. 22

c) CIRCUIT DE CHARGE.

On voit sur le schéma que la tension S_1 est délivrée par une barrette de court-circuit C placée entre deux bornes. Si on la remplace par une résistance extérieure au réseau, cette dernière sera comprise dans le circuit de charge mais pas dans le circuit de décharge puisque placée avant le commutateur tournant. On peut donc dans certains cas simples donner une grande valeur à cette résistance, qui est en fait la première résistance du réseau, sans craindre que la décharge totale ne puisse être effectuée à cause d'une trop grande constante de temps. Ceci est valable en particulier pour tous les réseaux uni-dimensionnels.

On voit aussi que les tensions S_1 et S_2 peuvent être permutées, ce qui donne un signal en sens opposé. Enfin, une tension de secteur de l'ordre de 300 volts peut être prise par S_1 aux fins de réglage. Signalons que S_2 peut être coupé (retour aux conditions initiales par les frontières du réseau portées à certains potentiels fixes).

d) TENSIONS VERTICALES.

Les températures sont comptées en variable réduite de 0 à 1 comme le signal unité et il n'y a pas de problème d'échelle comme pour la variable temps.

Le potentiomètre P_V (identique à P_H) est gradué de 0 à 1 en 1000 points pour toute la tension V_0 . Un inverseur I sert à permuter les lectures de 1 à 0 pour des problèmes de refroidissement, par exemple. On a déjà vu que les tensions V_2 et V_3 pouvaient prendre diverses valeurs continues, ce qui est indiqué sur le schéma.

e) TUBE CATHODIQUE.

Le tube 5CP7A possède une anode A_3 de post-accélération. Du fait des conditions de balayage, très dissymétriques, une concentration correcte du spot ne peut être atteinte qu'en portant l'anode A_2 à une tension positive de la même manière que les plaques non actives du tube sont cadrées par les tensions V' et H' . Le reste de l'alimentation ne présente aucune particularité.

5.-RÉGLAGE ET FONCTIONNEMENT DE L'ENSEMBLE.

Il est facile de voir maintenant que l'appareil présente un certain nombre de caractéristiques originales qui ont été définies.

En particulier quelles que soient la tension V_0 et les tensions de cadrages du tube cathodique, l'image complexe qui apparaît sur son écran correspond, de façon aussi rigoureuse que possible, à la réponse à un signal unité et est relevée par une double méthode de zéro dans des échelles réduites de temps et température qui demeurent immuables. Les variations du secteur, les distorsions du tube (trapézoïdale par exemple) n'ont aucun effet sur les mesures. Par action sur V_0 et sur les cadrages, l'image peut être à volonté déplacée en bloc et grossie pour examiner, comme à la loupe, telle partie intéressante de la courbe de réponse, sans qu'il soit nécessaire de toucher aux autres réglages. Les avantages de notre procédé de relevé ne font du reste aucun obstacle à l'observation visuelle ou photographique de la courbe et de ses déformations sous l'influence des paramètres donnés.

Les premières expérimentations ont été faites en réunissant sur une table le contacteur et des éléments divers (ponts diviseurs, alimentation continue, tube cathodique, etc.).

La figure 23 montre cette installation au centre de laquelle on peut voir les premiers réseaux à résistances et capacités que nous avons construits. Ces éléments avaient une tolérance d'environ 5% et ont servi à dégrossir le mode opératoire.

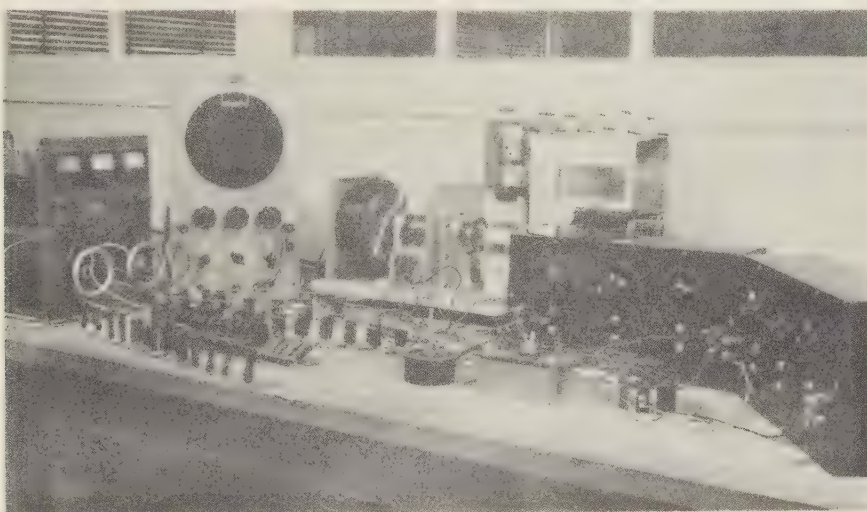


Fig. 23

Un appareil réunissant tout ce qui dans le montage n'était pas le contacteur ou le réseau a été construit au Laboratoire d'Analogies Electriques. La figure 24 (p. 28) donne l'aspect final du matériel constituant l'analyseur de régimes transitoires. On distingue, en particulier, sur la platine de l'appareil, le tube cathodique, le fréquencemètre, des appareils de mesure qui donnent la valeur de la tension et du courant d'alimentation et enfin tous les boutons de

réglages, interrupteurs, voyants, etc.).

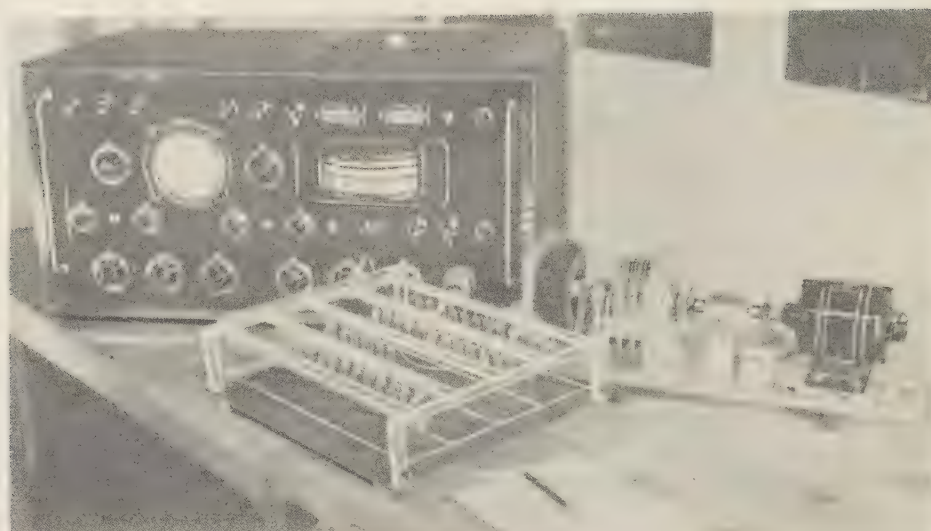


Fig. 24

Le réglage du contacteur et de l'appareil de mesure se fait facilement suivant un certain ordre. Considérons la figure 25. Les résistances ont été dessinées en supposant qu'une droite verticale se déplaçant sur la figure de gauche à droite avec une vitesse constante couperait chaque résistance en un point de potentiel variant linéairement avec le temps. Les diverses connexions sont référées aux temps correspondants, de même que les coupures de la bague correspondant au balai S . Les temps parasites sont naturellement grossis sur le dessin : ils ne représentent en fait que quelques pour cent du temps de base $t_2 - t_0$.

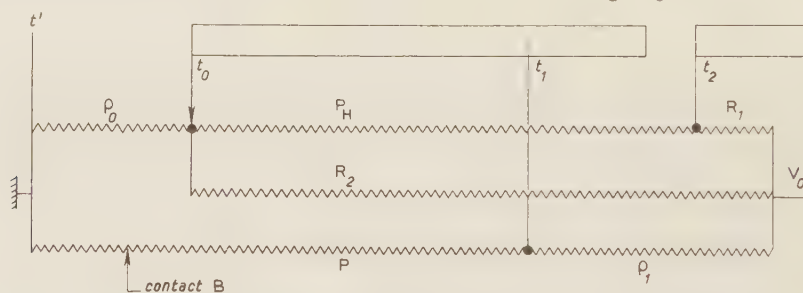


Fig. 25

On effectue d'abord le réglage des quatre curseurs tournant sur le potentiomètre P . Il s'agit de s'assurer qu'ils sont rigoureusement à angle droit l'un de l'autre pour éviter tout court-circuit des extrémités du bobinage. On les bloque ensuite dans leur position définitive.

Ensuite on règle la pression des balais du commutateur à la meilleure valeur en faisant tourner l'ensemble à la vitesse $1/2$. Il faut ensuite régler le balai S en avançant le temps t_0 le plus près possible du début du balayage du tube cathodique correspondant au contact du curseur B sur le potentiomètre.

On observe pour ce faire une courbe de réponse à montée rapide (fig. 8), obtenue dans les premières sections d'un réseau quelconque. On prend pour cela la vitesse $1/8$.

Puis c'est le réglage du balai V qui doit aborder sa piste juste un peu avant t_0 . Le balai H se règle pour quitter sa piste dans le même temps que le balai V . Ces trois balais réglables possèdent un verrouillage. Le réglage de l'échelle des temps débute par ρ_0 : la même courbe de

réponse est utilisée avec la droite verticale de la figure 9 bis. On affiche zéro sur le potentiomètre P_H et on règle ρ_0 jusqu'à ce que la courbe parte bien de l'axe des températures ainsi obtenue (fig. 26).

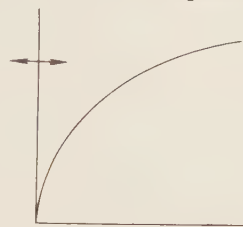


Fig. 26

Pour régler ρ_1 on débranche le réseau, on commute S_1 sur la tension secteur et on réunit S à V_1 . En opérant à la vitesse $1/4$ c'est une durée de quatre centièmes de seconde qui correspond au temps de base si la fréquence est de 50 pps. En fait ce seront toujours deux périodes de sinusoïde qui resteront fixes sur l'écran du tube quelle que soit la fréquence du secteur ; plus exactement la fraction de ces périodes correspondant à l'intervalle de temps t_1 à t_2 ne sera pas visible, ce qui ne change rien au réglage.

Le principe de ce dernier est le suivant : on voit sur la figure 27 les deux périodes et

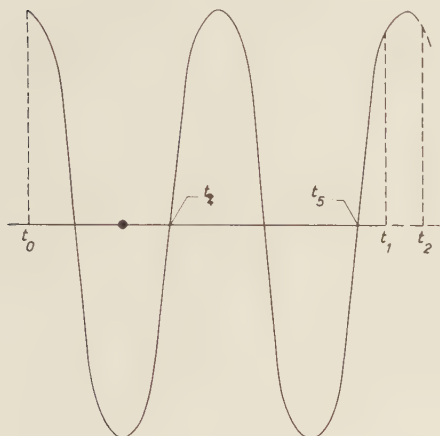


Fig. 27

l'axe des temps (fig. 10 bis) sur lequel on fait glisser le point de la figure 9. La sinusoïde du secteur a une phase quelconque et on amène en réglant la valeur de P_H le point en t_4 , départ d'une période complète qui se termine en t_5 en ayant duré :

$$(34) \quad \tau = t_5 - t_4$$

P_H est de ce fait réglé à une valeur quelconque de potentiel : H_4 . Augmentons-la de la valeur correspondante au temps τ . L'échelle 0-1 correspond à quatre centièmes de seconde, c'est-à-dire $2\tau_{50}$, l'indice 50 désignant les valeurs pour la fréquence 50 pps et le commutateur R_1, R_2 ayant été réglé à la fréquence indiquée par le fréquencemètre. Il faut donc ajouter à la valeur H_4 , chiffrée entre 0 et 1, pour arriver au potentiel H_5 qui devrait correspondre à t_5 , la valeur :

$$(35) \quad H_5 - H_4 = \frac{\tau}{2\tau_{50}}$$

On règle ensuite ρ_1 pour que la sinusoïde se déplace légèrement et vienne rencontrer le point au temps t_5 . Mais les potentiels aux temps t_0 et t_4 ayant en même temps bougé, il faut refaire le réglage de ρ_0 , puis celui de ρ_1 , etc. En fait, la deuxième et la troisième approximations sont indiscernables entre elles.

Pratiquement, lors de ces réglages, on place le commutateur R_1, R_2 toujours sur 50 pps, quelle que soit la fréquence réelle du secteur et on ajoute :

$$(36) \quad H_5 - H_4 = 0,5.$$

En effet, les potentiels correspondants pour H_4 et H_5 restent les mêmes. Ils sont multipliés d'abord par τ/τ_{50} puis par τ_{50}/τ . Les réglages s'en trouvent simplifiés au maximum et les résistances variables ρ_0 et ρ_1 sont ensuite bloquées par un verrouillage.

Tous ces réglages sont stables et immédiatement contrôlables. Seule une lente usure des balais pourraient y apporter une modification perceptible à laquelle on ferait correspondre à l'instant le recalage correspondant.

Le fonctionnement de l'appareil est immédiat et ne nécessite qu'un seul opérateur. Un expérimentateur non entraîné apprend à régler et à utiliser l'appareil en moins d'une heure. Le branchement du réseau s'effectue par quatre fils munis de pinces "crocodiles" qui sortent du contacteur tournant. Un cordon multiconducteur réunit ce dernier à l'appareil de mesure.

Les réglages étant supposés effectués comme il a été dit, il suffit de vérifier qu'à la

vitesse employée chaque noeud du réseau est bien déchargé à la fin du cycle (on n'examine que les noeuds se déchargeant le plus lentement). On relève ensuite la courbe de réponse aux noeuds voulus en la suivant par le point lumineux ou le croisement d'axes.

Les premières expérimentations ont montré immédiatement la précision à laquelle on pouvait arriver et la souplesse de l'analyseur [51]. Signalons que l'appareil a été utilisé avec facilité pour le réglage des systèmes à relais : mesure des échelonnements de contacts, réglage des enclenchements successifs et élimination des rebondissements dans des espaces de temps allant de $100\ \mu\text{s}$ à $80\ \text{ms}$.



III - CONSTRUCTION DES RÉSEAUX A RÉSISTANCES ET CAPACITÉS

La réalisation du réseau correspondant à chaque problème posé s'inspire tout d'abord des principes qui ont été retenus lors de la conception de l'Analyseur ; l'emploi généralisé de petits éléments ne dispense pas, cependant, de l'observation de certaines règles générales propres à l'utilisation même du principe du réseau.

Les divers problèmes soulevés par la construction d'un réseau, représentant un corps continu par un morcellement en un certain nombre de sections, peuvent se ramener à deux groupes :

- 1°) Influence du nombre de ces sections de leur position, de leur grandeur relative et des conditions aux frontières.
- 2°) Influence des perturbations causées par l'imperfection de chaque élément constitutif.

Les desiderata correspondants ont été formulés par divers auteurs. Il convient encore ici de ne pas s'étendre sur les détails de calculs que l'on pourra trouver dans les textes originaux, mais de faire une synthèse des différents résultats pour en tirer des données immédiatement utilisables.

1.-RÉSEAUX UNI-DIMENSIONNELS.

On fait rentrer dans cette catégorie non seulement les corps très étendus devant leur épaisseur (plaques ou murs simples et composés), mais les corps se rattachant à la forme cylindrique ou sphérique. Une grande partie de leurs caractéristiques sont par ailleurs valables pour les réseaux bi ou tri-dimensionnels.

a) PLAQUE.

STRUCTURE DU RÉSEAU.

Une plaque ou un mur simple étant parcouru par un flux de chaleur dans le sens de son épaisseur, la répartition de la température est donnée par :

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -P.$$

On peut supposer, pour former le réseau, que la puissance calorifique P qui prend naissance dans le corps est nulle et que la conductivité λ est constante en tout point. On a alors la

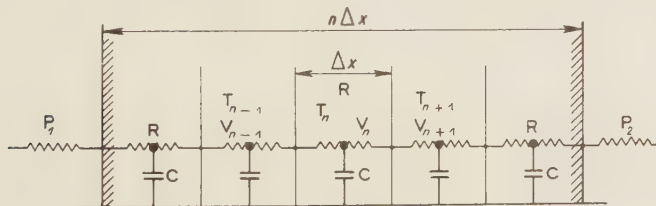


Fig. 28

formule :

$$(37) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ diffusivité du corps.

Un réseau tel que celui de la figure 28 peut représenter un câble

électrique ayant une certaine résistance par unité de longueur r_0 et une capacité c_0 . La propagation d'une tension V dans ce câble a pour équation :

$$(38) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = r_0 c_0 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

C'est l'analogie entre (37) et (38) qui a, on le sait, inspiré la première réalisation de L. BEUKEN. Le réseau en question est formé de n sections égales avec une résistance R et une capacité C en leur milieu, auxquelles on fait correspondre n sections égales de longueur Δx dans le mur étudié. Chaque section est donc caractérisée d'une part par une diffusivité a et une longueur Δx , d'autre part par une résistance R et une capacité C .

La méthode graphique de BINDER SCHMIDT utilise d'une façon courante une relation de récurrence immédiate (équations aux différences finies) donnant l'élévation de température ΔT_n au point n pendant le temps Δt_t :

$$(39) \quad \Delta^2 T_n = \frac{2a}{(\Delta x)^2} \left(\frac{T_{n+1} + T_{n-1}}{2} - T_n \right) \Delta t_t.$$

D'autre part, la loi de KIRCHHOFF donne la relation analogue pour le réseau :

$$(40) \quad \Delta^2 V_n = \frac{2}{RC} \left(\frac{V_{n+1} + V_{n-1}}{2} - V_n \right) \Delta t_e.$$

Dès lors le rapport entre les temps thermiques et électriques est déterminé par :

$$(41) \quad \frac{t_e}{t_t} = \frac{a RC}{(\Delta x)^2} = a r_0 c_0.$$

Les températures et les tensions ne diffèrent que par un coefficient constant arbitraire.

En fait, l'ordre de grandeur des temps est imposé par le phénomène lui-même et par l'analyseur et on est conduit à jouer sur le nombre des sections et les valeurs de R et de C .

Les constantes de temps du phénomène thermique peuvent être très variables : par exemple de 1/100 de seconde (échauffement d'un film de cinéma [52]) à quelques mois (refroidissement d'un barrage). Mais le rapport des temps thermiques aux temps électriques varie de 200 – nombre moyen indiqué pour les grandes machines – à quelques 100 000, dans le cas de notre analyseur.

Aux frontières (surfaces du mur) sont figurées deux résistances P_1 et P_2 . Elles représentent les deux résistances équivalentes de paroi qui peuvent correspondre à des paramètres très complexes suivant le phénomène calorifique mis en jeu. La résistance P_1 correspondra, par exemple, à un coefficient de passage global h_1 et aura pour valeur :

$$(42) \quad P_1 = \frac{\lambda}{h_1} \frac{R}{\Delta x}.$$

Une autre variante consiste à faire débiter le morcellement par une demi-tranche à la surface du corps. La première capacité est alors mise à l'entrée du réseau et sa valeur est la moitié de celle des suivantes (fig. 29).

Quelle est la variante préférable ? On a vu surgir à propos de l'analogie électrique des discussions semblables à celles concernant ce choix pour l'épure de BINDER SCHMIDT [22, 25]. Par la nature même des choses, on ne peut trancher a priori. Nous pensons que les résistances de frontières jouent un grand rôle dans la décision à prendre. Il nous paraît normal de considérer – et l'expérience le confirme – que si le phénomène thermique est imposé par l'intermédiaire d'une résistance de surface négligeable, la capacité d'entrée dans la deuxième variante ne jouera aucun rôle utile et que par contre, le

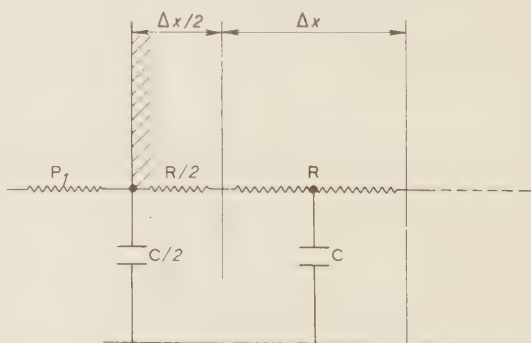


Fig. 29

noeud suivant se trouvera reporté à la distance Δx ; cela diminue la précision de relevé des températures et gradients près de la surface par rapport à la première variante, où l'on peut accéder au réseau à la distance $\Delta x/2$ de la surface en question.

Pour une résistance extérieure de valeur moyenne, c'est, par contre, la deuxième variante qui semble préférable en ce qui concerne le départ de la courbe d'élévation de température à la surface, si une élévation unité est imposée à l'extérieur.

Pour une résistance de valeur élevée devant R , la chose a peu d'importance. Ajoutons que vers l'intérieur du corps les phénomènes sont peu affectés par le choix de la variante et qu'en prenant un nombre suffisant de sections on diminue toute cause d'erreur près de la surface. Etant donné l'importance de l'étude des chocs thermiques (résistances de surface très basses) nous avons choisi, dans les vérifications et études entreprises, la première variante en accord, du reste, avec la quasi-totalité des expérimentateurs étrangers.

MURS COMPOSÉS.

Un mur plan composé de plusieurs matériaux est représenté sans difficulté en attribuant à chaque épaisseur d'indice p ou q un nombre entier de sections de largeur Δx_p ou Δx_q , telles que

$$(43) \quad \frac{R_p}{R_q} = \frac{\Delta x_p}{\Delta x_q} \cdot \frac{\lambda_q}{\lambda_p}$$

et que :

$$(44) \quad \frac{C_p}{C_q} = \frac{\Delta x_p}{\Delta x_q} \cdot \frac{c_p \rho_p}{c_q \rho_q}.$$

On peut, par exemple, prendre comme règle donnant le rapport $\frac{\Delta x_p}{\Delta x_q}$ de rendre R_p et R_q voisins pour tenir compte de l'importance relative des conductivités.

De toute façon, ce cas se traite avec beaucoup plus de souplesse que par la méthode d'intégration graphique.

D'un autre côté, il est bien évident que la condition :

$$(45) \quad \frac{(RC)_p}{(RC)_q} = \left(\frac{\Delta x_p}{\Delta x_q} \right)^2 \frac{a_q}{a_p}$$

qui est obtenue par la multiplication de (43) et (44) est nécessaire mais non suffisante et qu'il ne suffit pas de fixer le produit RC pour chaque section : il n'y a qu'un degré de liberté pour tout le réseau et non un par couche de matériaux différents (ceci est rendu intuitif par quelques considérations sur les impédances des circuits électriques).

INFLUENCE DU NOMBRE DE SECTIONS.

Ce facteur capital conditionne pour beaucoup la précision et l'efficacité de la méthode ; il conditionne également le prix de revient du montage analogique, ainsi que le temps nécessaire à son expérimentation. Ce choix du nombre de sections n'a évidemment rien d'absolu. Tel problème de choc thermique demande, pour déterminer les gradients, le relevé des variations de température en de nombreux points voisins, d'où la nécessité d'un grand nombre de noeuds. Telle autre étude du lent refroidissement d'un lingot d'acier sera traitée facilement avec quatre sections représentant la demi-épaisseur ou le rayon : certains auteurs estiment en effet que la précision ainsi obtenue est "meilleure que la reproductibilité des mesures des propriétés thermiques de différents échantillons du même acier" [3]. Ils ajoutent que souvent l'usage de deux sections et parfois même une seule donnent une précision suffisante. Il s'agit là, évidemment, d'un cas limite, d'ailleurs discutable, mais il n'en reste pas moins vrai que parfois un petit nombre de sections est suffisant. Cette remarque est spécialement intéressante pour la construction de réseaux à deux ou trois dimensions. Les mêmes auteurs ont estimé d'ailleurs

que la précision obtenue croissait comme le carré du nombre de sections, dans le cas où ce nombre est réduit [2, 3]. Un autre facteur important est ici la grandeur relative de la résistance d'entrée mais, de toute façon, seule la solution correspondant au régime permanent dans le cas d'une conductibilité constante est exacte, les capacités n'intervenant plus.

La solution en régime transitoire étant difficilement calculable pour toute valeur des paramètres, des auteurs se sont référés aux résultats obtenus expérimentalement pour douze sections, étant donné qu'ils n'ont pu pratiquement les différencier de ceux obtenus pour quinze sections [31]. Ces résultats se présentent sous la forme de courbes de température en fonction de la distance dans le mur pour un temps donné (aspect analogue à l'épure de BINDER SCHMIDT).

On emploie le plus souvent dans tous ces problèmes des paramètres réduits qui sont (fig. 30) pour le temps :

$$(46) \quad \chi = a t_e / L^2 = t_e / n^2 RC$$

pour la distance :

$$(47) \quad N = \frac{x}{L}$$

pour la résistance de surface :

$$(48) \quad m = \frac{P}{nR} = \frac{\lambda}{hL}$$

On pouvait penser a priori que la présence de la résistance d'entrée P_1 représentée par :

$$(49) \quad m_1 = \frac{P_1}{nR} = \frac{\lambda}{h_1 L}$$

pouvait atténuer l'erreur due au morcellement, surtout près de la surface de la plaque et pour les temps courts. En fait, on constate de plus que dès que m_1 dépasse une certaine valeur (6 par exemple) la température du corps s'élève d'une manière presque uniforme et très lentement (des auteurs, calculant des abaques pour certains corps simples, admettent l'isothermie complète [53, 54]). Il nous a semblé intéressant de choisir les deux courbes les plus probantes de [31], qui représentent les résultats, d'une part pour $m_1 = m_2 = 0$ avec quatre et cinq sections dans le réseau, d'autre part pour $m_1 = 2$ et $m_2 = 1$ avec deux ou trois sections seulement (fig. 31 et 32) : à notre avis, les erreurs sont d'un ordre de grandeur comparable dans les deux cas ; quoiqu'il en soit, elles sont trop élevées pour les temps faibles.

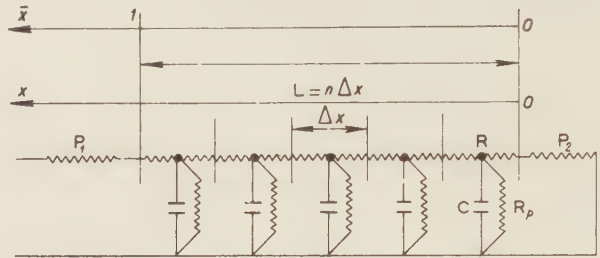


Fig. 30

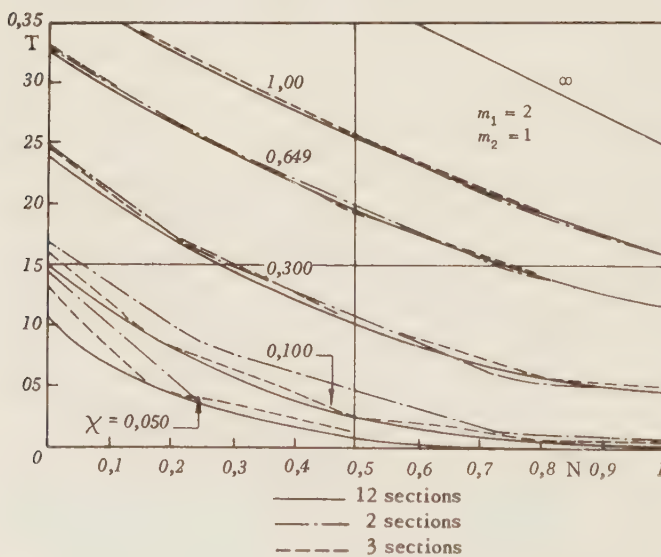


Fig. 31

Un autre auteur [29, 30] a étudié l'influence du nombre des sections dans le cas le plus défavorable : ($m_1 = 0$), pour le réseau en circuit ouvert ($m_2 = \infty$) ou fermé ($m_2 = 0$). Les résultats sont fournis par le calcul et non plus par l'expérience. Ils comportent les variations des tensions et intensités, dans les deux cas, aux deux extrémités du réseau et pour différents nombres de sections ($n = 1$ à 10) ainsi que leur comparaison avec la valeur théorique ($n = \infty$) exprimée en fonction du temps. Comme la théorie donne à la surface d'un corps pour lequel $m_1 = 0$, un courant infini au temps zéro, il est bien évident

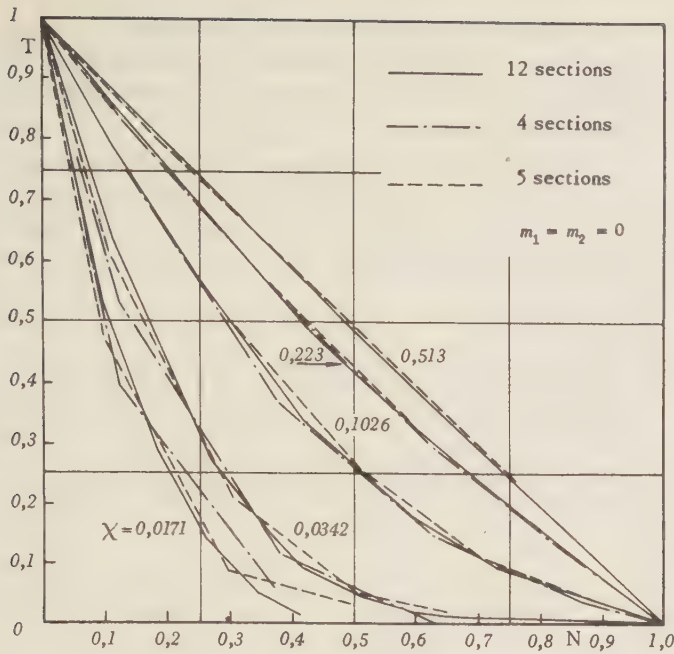


Fig. 32

en certains endroits n'influence guère la précision. On peut donc, par ce procédé, donner un plus grand nombre de lectures en certains endroits plus intéressants.

En conclusion ce sont surtout les conditions particulières à chaque cas et surtout l'expérience qui guideront l'opérateur dans la construction de son réseau. Il faut cependant retenir le chiffre de dix sections pour la plupart des applications courantes.

INFLUENCE DES PERTES.

L'Analyseur de Régimes Transitoires ne présente pas d'autres pertes que celles qui pourraient provenir des capacités utilisées, car aucun défaut d'isolement n'est à redouter dans les connexions. Les capacités utilisées comportent un diélectrique en mica enrobé dans une cire de propriétés stables. Leurs pertes sont, dans le cas envisagé, négligeables aux fréquences d'utilisation ; la résistance de perte est, dans tous les cas, supérieure à 50 000 mégohms.

PASCHKIS et HEISLER ont étudié [31] l'influence de ces pertes en régime établi, cas où elles sont le plus nuisibles à la précision.

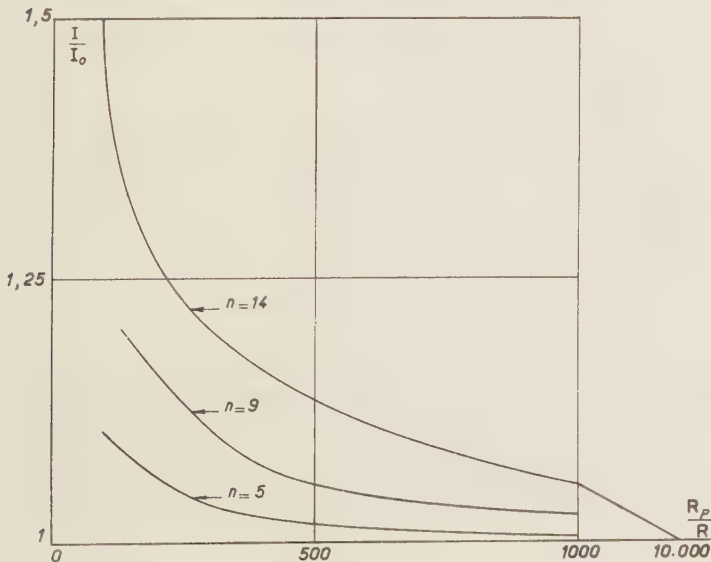


Fig. 33

qu'une erreur infinie peut être reprochée au réseau dans ce cas ; nous montrerons du reste dans les applications qu'elle peut être évitée, mais il n'en reste pas moins vrai qu'il faut se fixer un nombre de sections pour lequel on pourra assimiler les deux variations au bout d'un certain temps. BROKMEIER conclut à un nombre de sections égal ou supérieur à dix pour, rappelons-le, une résistance d'entrée m_1 nulle.

L'introduction d'une résistance terminale finie m_2 est aussi envisagée par cet auteur comme un cas moins mauvais.

Enfin, PASCHKIS et HEISLER indiquent [31] que le fait de réduire la longueur des sections et d'augmenter conjointement leur nombre

Considérons le réseau de la figure 30. L'étude a été faite pour $m_1 = m_2 = 0$, cas défavorable. Le corps à représenter comporte n sections de résistance R et de capacité C avec une résistance de perte R_p . Les auteurs considèrent que ces trois facteurs restent fixes lorsque n varie, ce qui conduit à réaliser des réseaux dont les constantes de temps vont varier comme n^2 . Naturellement l'influence des pertes va être de ce fait fonction de n pour un rapport R_p/R donné par section. Le rapport des courants et tensions ainsi obtenus aux valeurs théoriques a ainsi été donné ; la figure 33 montre, par

exemple, les résultats des auteurs en ce qui concerne le courant d'entrée I en régime établi rapporté au courant théorique I_0 en fonction du rapport R_p/R . I/I_0 décroît vers 1 quand R_p/R augmente mais croît rapidement avec le nombre de sections, ce qui amènerait à une conclusion diamétralement opposée à celle résultant de l'étude du morcellement.

En réalité, nous croyons devoir poser le problème autrement. Le réseau à n sections représentant le corps étudié devra, pour s'adapter au mieux à un analyseur, présenter une constante de temps totale d'un ordre de grandeur donné et non pas, comme dans la précédente expérience, variable comme n^2 . C'est donc le rapport des résistances totales que nous considérons comme la variable principale, soit :

$$(50) \quad \frac{R_p}{n} \cdot \frac{1}{nR} = \frac{R_p}{n^2 R}.$$

Dans ces conditions, si l'on retrace les courbes de la figure 33 avec ce changement de variable on obtient d'autres courbes (fig. 34) d'où l'on peut tirer des conclusions différentes : l'erreur due aux pertes tend à devenir, pour un nombre suffisant de sections, indépendante de ce nombre de sections ; elle évoluerait même favorablement quand n augmente.

Il faut du reste voir que ces courbes ont une échelle d'erreurs très grande et qu'une petite partie seulement en est utilisable dans la pratique.

Les mêmes auteurs établissent par ailleurs que les résultats sont les mêmes si, pour n donné, on change R et C en laissant le produit RC constant. Cette conclusion est normale : si l'on opère le changement R/α et $C\alpha$, la résistance de perte va devenir R_p/α et le rapport R_p/R n'aura pas varié.

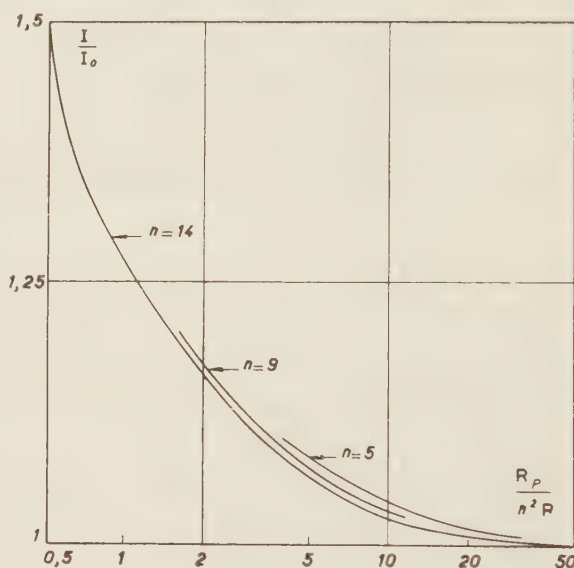


Fig. 34

BROKMEIER a calculé de son côté l'influence des pertes en régime variable pour un réseau de dix sections toujours pour $m_1 = 0$ et $m_2 = 0$ ou ∞ [29, 30]. Il démontre qu'il est nécessaire d'obtenir un rapport

$$(51) \quad \frac{R_p}{R} \geq 5\,000$$

ce qui est en accord avec les résultats de PASCHKIS et HEISLER

Examinons à quelle résistance R_m maximum peut nous conduire cette condition avec une résistance de perte d'au moins 50 000 mégohms :

$$(52) \quad R_m = 50 \cdot 10^9 / 5 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10^6 \omega.$$

Or, nous dépassons rarement 2 ou 300 000 ohms : les pertes ne jouent aucun rôle dans notre analyseur.

INFLUENCE DE LA SELF-INDUCTION. ONDES STATIONNAIRES.

BROKMEIER étant, à notre connaissance, le seul auteur ayant également réalisé des réseaux RC avec de petits éléments, est par ce fait le seul à s'être préoccupé, à très juste titre, de l'influence possible de la self-induction de la ligne présentée par la configuration d'un réseau et de celle propre de chaque résistance. Ses calculs [29, 30] ont porté sur un réseau à dix

sections, toujours dans les mêmes conditions. Ils l'ont amené à considérer plusieurs régimes de réponses à l'impulsion unité : le régime purement exponentiel, seul exact, le régime vibratoire, obtenu pour de fortes inductions et un régime intermédiaire pour lequel on passe de l'un à l'autre quand la self-induction d'une section atteint la valeur de :

$$(53) \quad L_m = \frac{R^2 C}{16}.$$

Les calculs de BROKMEIER l'ont également mené à définir une induction maximum pour laquelle il ne se produit pas d'ondes stationnaires par réflexion aux extrémités du réseau :

$$(54) \quad L_m = \frac{R^2 C}{100}.$$

Cette condition est beaucoup plus sévère et conduit à :

$$(55) \quad R \geq 10 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

L'auteur calcule ensuite la self-induction propre d'une section L_s et de sa résistance L_r par des formules classiques dans un exemple reproduit figure 35 et pour lequel :

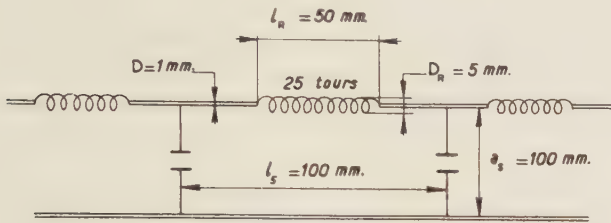


Fig. 35

$$\begin{aligned} L_s &= 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ H} \\ L_r &= 5 \cdot 10^{-7} \text{ H}, \end{aligned}$$

valeurs qu'il majore en une self-induction totale :

$$(56) \quad L = 10^{-6} \text{ H}.$$

Ce qui le conduit, avec toute sécurité, d'après la formule (55) à la condition :

$$(57) \quad R^2 C \geq 10^{-4} \text{ ohms-secondes.}$$

En ce qui concerne nos circuits, nous aurons avec les mêmes formules, un facteur L_s équivalent et un facteur L_r de l'ordre de :

$$(58) \quad L_r = 1 \text{ à } 2 \cdot 10^{-7} \text{ H}.$$

et nous sommes sûrs d'avoir :

$$(59) \quad L_{\max} \leq 5 \cdot 10^{-7} \text{ H}.$$

Ce qui fait avec la formule (55) :

$$(60) \quad R^2 C \geq 5 \cdot 10^{-5} \text{ ohms-secondes.}$$

La plus petite capacité utilisée étant de 1 000 pF nous en tirons la condition :

$$(61) \quad R \geq 230 \text{ ohms}$$

valeur à laquelle nous ne sommes jamais descendus. On peut, en conséquence, considérer encore ici que la self-induction ne joue aucun rôle dans notre analyseur.

INFLUENCE DES TOLÉRANCES DE CONSTRUCTION.

Dans un réseau où toutes les résistances (ou toutes les capacités) seraient affectées d'une même erreur relative de construction ϵ , les mesures faites seraient modifiées d'une manière simple : l'échelle des temps serait multipliée par $1 + \epsilon$. C'est le cas le plus défavorable pour le relevé des tensions et des courants en fonction de l'échelle vraie des temps. Il se produit alors dans tout relevé une erreur maximum qui existe pour un certain instant du phénomène variable.

Le calcul de cette erreur [29, 30] a été fait par BROKMEIER dans les mêmes conditions que précédemment. En ce qui concerne le courant on peut déduire directement de ses courbes que

l'erreur maximum qui peut arriver est pour de petites valeurs de ε :

$$(62) \quad E_1 = 1,2 \varepsilon.$$

En ce qui concerne la tension on peut déterminer dans les mêmes conditions un facteur intermédiaire :

$$(63) \quad E_U = -0,36 \varepsilon.$$

Les erreurs de tension s'en déduisent dans le cas de $m_2 = \infty$ (circuit ouvert) par :

$$(64) \quad E_{U\infty} = -1,272 E_U$$

et dans le cas de $m_2 = 0$ (court-circuit) par :

$$(65) \quad E_{U0} = 1,97 E_U.$$

D'où le choix de la tolérance ε pour l'ensemble RC en fonction de la précision désirée pour tel ou tel relevé.

Il faut cependant tenir compte du fait qu'en pratique il s'agit plutôt d'erreurs de construction dites "accidentelles" que, dans ces circonstances, elles tendent à se compenser les unes par les autres et qu'en ce domaine, pour employer une expression imagée, le réseau "pardonne" beaucoup. Pratiquement, il ne nous a jamais paru utile de pousser la précision des éléments constitutifs au-dessus de 0,5% ; c'est d'autre part une limite au delà de laquelle leur prix monte d'une manière prohibitive. Le plus souvent les capacités utilisées offrent des précisions comprises entre 0,5 et 1%. Un calcul statistique a été effectué pour le réseau bidimensionnel, comme on le verra, plus loin [11].

INFLUENCE DE LA FORME DU SIGNAL D'ENTRÉE.

Jusqu'à présent la tension imposée à l'entrée du réseau a été une brusque élévation de 0 à 1, le signal unité déjà défini.

Tous les auteurs sont d'accord pour reconnaître ces conditions d'analyse comme les plus dures et se référer de ce fait aux erreurs qu'elles peuvent révéler dans l'emploi de la méthode du réseau. Comme nous l'avons vu, diverses méthodes permettent d'ailleurs de passer des relevés ainsi obtenus à ceux qui résulteraient d'un signal d'entrée différent ou réciproquement.

b) CYLINDRE.

STRUCTURE DU RÉSEAU. VALEURS VRAIES.

Les problèmes de représentation des corps de forme cylindrique (ou de révolution) parcourus par des flux suivant les rayons sont caractérisés –il en est de même pour les corps de géométrie sphérique– par une difficulté particulière, surtout si l'on doit se rapprocher de l'axe –ou du centre– correspondant.

La figure 36 représente un onglet découpé par deux plans méridiens dans un cylindre, ainsi que le réseau que l'on veut faire correspondre à un certain nombre de sections, caractérisée chacune par une capacité C_n placée en un certain point et et réunie à la capacité précédente C_{n-1} par la résistance R_n .

Nous définirons comme valeurs vraies, R_v et C_v , correspondant à une section de rayons r_1 et r_2 , les valeurs de résistance correspondant à l'intégration d'une couronne d'épaisseur dr , et de capacité correspondant au volume de la section, c'est-à-dire :

$$(66) \quad R_v = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} L_n \frac{r_2}{r_1}$$

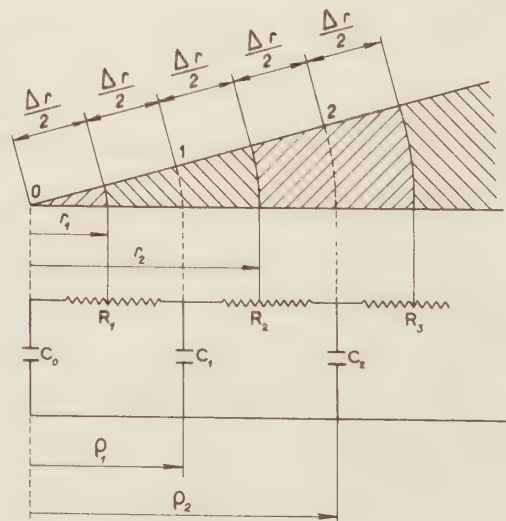


Fig. 36

$$(67) \quad C_v = \pi (r_2^2 - r_1^2).$$

Les grandeurs correspondantes pour la sphère sont :

$$(68) \quad R_v = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$(69) \quad C_v = \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3).$$

Il est capital de remarquer que ces expressions de R et de C sont les seules qui peuvent se sommer lorsque l'on réunit plusieurs sections consécutives et redonner ainsi les valeurs correspondant à la nouvelle section ainsi formée. Bien que certaines méthodes de morcellement conduisent à adopter d'autres valeurs - d'écriture parfois plus simple -, on peut se demander si R_v et C_v ne sont pas les expressions les plus correctes.

En effet, il est évident, par exemple, que R_v est la seule valeur qui donnera à chaque noeud, dans les deux cas, la répartition exacte des tensions et des courants en régime permanent, où le nombre des capacités, leur valeur, leur emplacement n'interviennent plus. Adopter pour chaque section une valeur différente de R_v ne se justifie donc que si les nouvelles valeurs prises pour R et C apportent un gain de précision tangible en régime transitoire ; c'est sur cette question qu'il est nécessaire d'ouvrir une discussion.

La difficulté près du centre ou de l'axe est bien connue : la résistance R_1 de la première section qui part du centre est infinie, d'après les formules (66) et (68). Si l'on restreint cette section au maximum, la capacité correspondante C_0 tend vers zéro (67 et 69), ce qui fait que l'on peut envisager dans certain cas de la négliger (cas où le corps lui-même s'étend jusqu'à son axe ou centre, région qui présente alors toujours une certaine isothermie due, par symétrie, à l'impossibilité d'un flux radial vers l'axe ou le centre). Le problème est donc pratiquement soluble.

En dehors de ce fait, alors que pour la plaque les valeurs correspondant à des sections égales sont égales et symétriquement localisées, on a pu concevoir pour une section de cylindre ou de sphère donnée plusieurs manières de localiser la capacité [55].

- 1°) Au milieu de la section.
- 2°) En un point partageant la section en deux zones de résistances égales.
- 3°) De même avec deux capacités égales.
- 4°) Avec deux produits RC égaux de part et d'autre.

De nouvelles manières peuvent toujours être envisagés. On a de même attribué aux éléments localisés des valeurs différentes suivant les méthodes adoptées :

- 1°) Méthode des valeurs vraies R_v , C_v , employée par certains auteurs [32, 39].
- 2°) Méthodes des différences finies [3, 36, 55].
- 3°) Détermination des valeurs de R et C d'après des considérations sur les graphiques de BINDER SCHMIDT adaptés au cylindre et à la sphère [22].
- 4°) Nous exposerons une méthode nouvelle de morcellement.

MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES.

Considérons figure 37 (p. 40) trois sections consécutives de largeur Δr et d'indice $n-1, n, n+1$, dont les surfaces moyennes sont situées aux distances ρ du centre et sont portées aux températures T représentées par les potentiels V existant aux bornes des capacités C .

A un temps t donné, l'écoulement radial de chaleur est donné par la formule :

$$(70) \quad \Delta^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

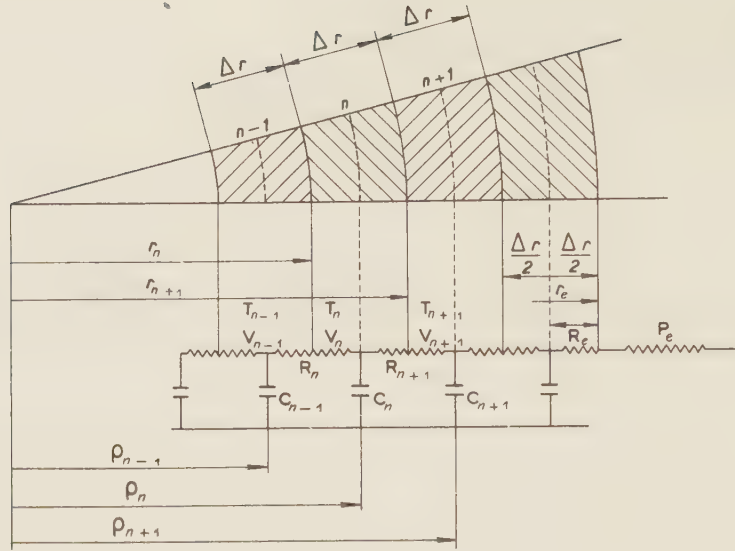


Fig. 37

La méthode des différences finies consiste à écrire l'équation (70) en prenant Δr au lieu de ∂r en trois surfaces moyennes consécutives et à rapprocher l'équation aux différences finies ainsi obtenue de celle provenant de l'application de la loi de KIRCHHOFF aux trois noeuds correspondants.

On obtient par ces deux voies [55] :

$$(71) \quad \frac{1}{a} \frac{\Delta T_n}{\Delta t_t} = \frac{(T_{n+1} - T_n) - (T_n - T_{n-1})}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2 \rho_n \Delta r} (T_{n+1} - T_{n-1})$$

soit :

$$(72) \quad \frac{(\Delta r)^2}{a} \frac{\Delta T_n}{\Delta t_t} = (T_{n+1} - T_n) \left(1 + \frac{\Delta r}{2 \rho_n}\right) - (T_n - T_{n-1}) \left(1 - \frac{\Delta r}{2 \rho_n}\right)$$

et d'autre part :

$$(73) \quad \frac{C_n \Delta V_n}{\Delta t_e} = (V_{n+1} - V_n) \frac{1}{R_{n+1}} - (V_n - V_{n-1}) \frac{1}{R_n}$$

Les équations (72) et (73) étant homogènes en T ou V on en tire :

$$(74) \quad \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{1 - \frac{\Delta r}{2 \rho_n}}{1 + \frac{\Delta r}{2 \rho_n}} = \frac{r_n}{r_{n+1}}$$

et

$$(75) \quad \frac{\Delta t_e}{\Delta t_t} = \frac{a}{(\Delta r)^2} R_n C_n \frac{r_n}{\rho_n} = \frac{a}{(\Delta r)^2} R_{n+1} C_n \frac{r_{n+1}}{\rho_n}$$

que l'on peut écrire encore :

$$(76) \quad R_{n+1} C_{n+1} \frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}} = R_{n+1} C_n \frac{r_{n+1}}{\rho_n}$$

d'où :

$$(77) \quad \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$$

D'où les conclusions de la méthode des différences finies :

- 1°) La résistance représentant une certaine couronne est inversement proportionnelle au rayon moyen correspondant.
- 2°) La capacité représentant une certaine couronne est proportionnelle au rayon moyen correspondant.
- 3°) Le rapport des temps électriques et thermiques est donné par la formule (75).

Si l'on prend la valeur de la capacité vraie :

$$(78) \quad C_{v_n} = \pi (r_{n+1}^2 - r_n^2).$$

On peut la transformer en :

$$(79) \quad C_{v_n} = \pi (r_{n+1} - r_n) (r_{n+1} + r_n) = \pi \Delta r \cdot 2 \rho_n$$

d'où :

$$(80) \quad \frac{C_{v_{(n+1)}}}{C_{v_n}} = \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}.$$

La capacité obtenue par la méthode des différences finies est donc la capacité vraie, surface de la couronne. Si maintenant le problème traité exige que le morcellement soit effectué jusqu'au centre du cylindre, la présente méthode conduit aux formules suivantes, les notations étant celles de la figure 36 [3, 55].

$$(81) \quad r_n = (2n-1) \frac{\Delta r}{2}, \quad \rho_n = n \Delta r$$

d'où :

$$(82) \quad \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{2n-1}{2n+1} \quad R_n = \frac{R}{2n-1} \quad R_1 / R_2 / R_3 \dots 1 / \frac{1}{3} / \frac{1}{5} \dots$$

$$(83) \quad \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{n+1}{n} \quad C_n = n C \quad C_1 / C_2 / C_3 \dots 1 / 2 / 3 \dots$$

La formule (75) donne :

$$(84) \quad \frac{\Delta t_e}{\Delta t_t} = \frac{a}{(\Delta r)^2} R_n C_n \frac{2n-1}{2n} = \frac{R C a}{2(\Delta r)^2}$$

R et C étant des valeurs de référence.

La capacité au centre C_o est donnée en écrivant les équations (71) et (73) au centre :

$$(85) \quad \frac{1}{a} \frac{\Delta T_o}{\Delta t_t} = 4 \left(\frac{T_1 - T_o}{(\Delta r)^2} \right)$$

$$(86) \quad C_o \frac{\Delta V_o}{\Delta t_e} = \frac{V_1 - V_o}{R_1}$$

d'où avec (84) :

$$(87) \quad C_o = \frac{C_1}{8},$$

Formule obtenue aussi en faisant le rapport des surfaces des capacités vraies :

$$\left(\frac{\Delta r}{2} \right)^2 / \left(3 \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left(\frac{\Delta r}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}.$$

La résistance de passage P_e correspond au coefficient superficiel réduit :

$$m = \lambda / h r_e.$$

elle peut être rapportée par exemple à la première résistance vers l'extérieur R_e , qui vaut, selon la méthode employée :

$$R_e = \frac{1}{2\pi\lambda} \cdot L_n \frac{r_e}{\rho_{e-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \frac{2\pi r}{r_e + \rho_{e-1}}.$$

On a pour P_e :

$$(88) \quad P_e = \frac{l}{2\pi h r_e} = \frac{R_e m}{L_n \frac{r_e}{\rho_{e-1}}} \text{ ou } R_e m \frac{r_e + \rho_{e-1}}{2\Delta r}.$$

MÉTHODE GRAPHIQUE.

On peut aussi penser, pour déterminer R_n et C_n , à se rapprocher des conditions de morcellement graphique imposées par l'extension de la méthode de BINDER SCHMIDT au cylindre (ou à la sphère).

Pour le cylindre on a alors recours à un espace fictif η tel que des tranches $\Delta\eta = \Delta r/r$ soient rendues égales par l'emploi d'un papier à abscisses logarithmiques. D'où l'idée d'adopter d'égales résistances R pour d'égales tranches $\Delta\eta$ en gardant constant le produit RC [22].

D'où des résistances inversement proportionnelles à leur rayon moyen r . Le calcul mène à des capacités proportionnelles à leur rayon et c'est le produit $R_n C_n r_n / \rho_n$ qui est constant : on retrouve ici les résultats de la méthode des différences finies.

Cette dernière donnant pour la résistance une formule plus praticable que celle de la résistance vraie, il nous a paru indispensable de confronter les deux résultats et de voir dans quelles conditions on pouvait employer l'une à la place de l'autre.

En nous plaçant dans le cas de la figure 36, nous avons calculé et reproduit tableau 1 (au facteur $l/\pi\lambda$ près), les valeurs de résistances vraies R_v et aux différences finies R_D ainsi que l'erreur commise $(R_D - R_v)/R_v$ pour les sept premières sections en partant du centre. L'utilisation de cette table est immédiate : suivant la précision voulue ou celle des résistances dont on dispose, on voit à partir de quelle section on peut utiliser la méthode des différences finies ; ou bien, si le cylindre est creux, on détermine le rapport maximum ρ_n/ρ_{n-1} de la première section, qui permet d'utiliser cette méthode pour toute la couronne.

MÉTHODE DU RÉSEAU DIAGONAL.

Nous avons adapté sous ce vocable une méthode originale due à E. PERSICO [12]. Cet auteur calcule, pour le régime permanent, les huit résistances aboutissant à un noeud dans le réseau à résistances diagonales qu'il a conçu pour les champs bi-dimensionnels, cartésiens ou de révolution. La figure 38 montre ce nouveau schéma qui nécessite un nombre double de résistances. Pour le champ de révolution, nous prendrons pour axe $n=0$ et noterons les conductances correspondantes (figurées par des lignes pleines) F , G et H .

Tout le calcul de l'auteur repose sur la définition qu'il donne de l'erreur commise par rapport au champ réel (comme obtenu au bassin rhéoelectrique). Il la définit comme la différence entre le potentiel vrai et le potentiel que prend un noeud N lorsque les huit noeuds qui y sont reliés sont à leur potentiel vrai. Il montre que l'introduction de résistances diagonales fait

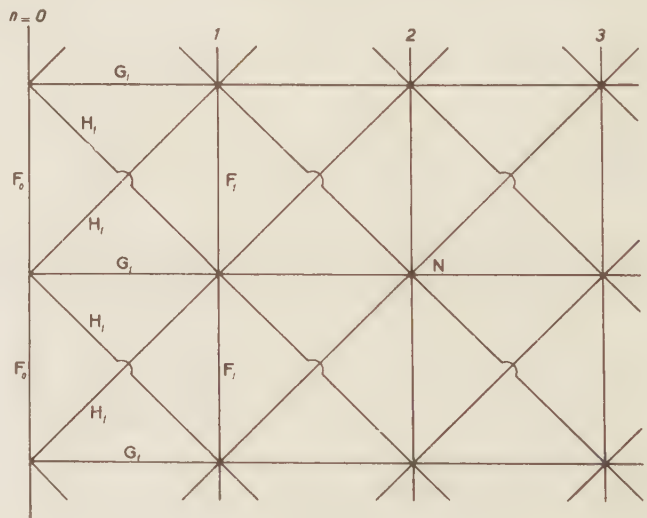


Fig. 38

passer l'erreur du quatrième ordre au huitième ordre pour le réseau cartésien et du troisième au quatrième, mais avec un très faible coefficient pour le réseau de révolution (symétrie axiale). Un assez long calcul lui permet de dresser une table de résistances pour les vingt cinq premières sections à une constante arbitraire près.

Nous avons remarqué qu'il était inutile de refaire ce calcul si l'on ne s'intéresse qu'au problème uni-dimensionnel: le champ bi-dimensionnel correspondant dans le réseau de E. PERSICO serait tel qu'à chaque noeud à la distance $n\Delta r$ de l'axe, correspondrait un même potentiel V_n , les conductances F_n n'étant alors plus parcourues par aucun courant.

Pour adapter ledit calcul à notre cas cylindrique il suffit donc d'ajouter à chaque conductance G deux conductances H pour obtenir une nouvelle conductance dont l'inverse R_A sera fonction de n et calculée de telle façon que quand n augmente indéfiniment elle rejoigne les valeurs obtenues par les autres méthodes.

Nous donnons, tableau 1, les sept premières valeurs de R_A et leur différence relative avec R_v . L'idée semble fructueuse car dès la deuxième résistance on ne constate qu'une différence extraordinairement petite (0,55%) avec la résistance vraie contre 3,6% pour la méthode des différences finies. Au delà, les différences deviennent rapidement négligeables.

Nous avons donc obtenu une méthode cohérente qui présente l'originalité de donner pratiquement les résistances vraies avec une valeur finie pour la première. On pense automatiquement à calculer le rayon du "trou" qui correspondrait à une telle résistance "vraie": il est de l'ordre du dixième de celui de la première section (exactement $0,09639 \Delta r$). Dans le même esprit, les premiers rayons seraient pratiquement de :

$$1,004 \Delta r, \quad 2,0005 \Delta r, \quad 3 \Delta r \text{ etc.}$$

En supprimant les diagonales, l'auteur calcule de nouvelles valeurs pour G' et F' . Les inverses de G' donnent alors, dans les conditions déjà vues, des résistances R_b dont la valeur est au-dessous des résistances obtenues par la méthode des différences finies. Les valeurs R_b ne présentent donc pas l'intérêt évident des valeurs R_A .

COMPARAISON DES MÉTHODES.

En ce qui concerne le régime transitoire, PASCHKIS et HEISLER ont publié [55] des résultats expérimentaux concernant le cylindre et la sphère.

La méthode des différences finies qui permet, pour le cylindre, de placer une résistance jusqu'au centre, les a conduits à éliminer la représentation d'un cylindre ayant le long de son axe un espace vide de très petit rayon (cylindre creux). Ils obtiennent ainsi une précision triple en passant de cette méthode à celle des différences finies qu'ils emploient ensuite pour les autres expériences ; nous comparerons cette dernière avec d'autres, moins habituelles.

INFLUENCE DU NOMBRE DE SECTIONS.

La méthode des différences finies demande un nombre impair de demi-sections. Les auteurs ont tracé des courbes de température en fonction de la position, pour divers temps et dans les conditions les plus dures : $m=0$ et signal unité. Ils en déduisent une erreur relative au centre du cylindre qui passe de +1% à -1% quand le nombre de sections varie de $8\frac{1}{2}$ à $18\frac{1}{2}$. L'erreur locale serait nulle pour $13\frac{1}{2}$ sections. Les auteurs ont ensuite essayé des sections d'épaisseur inégale, occupant en tout l'espace de $6\frac{1}{2}$ sections. Les résultats sont comparables au morcellement égal si ce n'est qu'en divisant en deux la section près du centre on obtient, pour ce centre, une précision à peu près double, ce qui semble normal. Les auteurs concluent à l'utilisation d'un nombre de sections au moins égal à $8\frac{1}{2}$ dans ces conditions.

AUTRES CARACTÉRISTIQUES.

Un mur cylindrique composé se construirait en partant des mêmes principes que pour le mur

plan.

Les conclusions concernant les pertes, la self-induction, la forme du signal d'entrée et la résistance de passage sont également semblables.

c) SPHÈRE.

STRUCTURE DU RÉSEAU. VALEURS VRAIES.

Une sphère se représentera de même façon qu'un cylindre : nous garderons les mêmes figures. Pour des sections égales, les résistances vont croître et les capacités décroître beaucoup plus vite au fur et à mesure que l'on se rapprochera du centre.

Rappelons les valeurs vraies pour R et C :

$$(68) \quad R_v = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$(69) \quad C_v = \frac{4}{3} \pi (r_2^3 - r_1^3).$$

Les mêmes difficultés et les mêmes hypothèses que pour le cylindre peuvent se présenter, comme il a été dit.

MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES.

L'équation à adapter au morcellement de la figure 37 devient :

$$(89) \quad \Delta^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t_t}$$

soit, en calquant sur le calcul précédent :

$$(90) \quad \frac{(\Delta r)^2}{a} \frac{\Delta T_n}{\Delta t_t} = (T_{n+1} - T_n) \left(1 + \frac{\Delta r}{\rho_n} \right) - (T_n - T_{n-1}) \left(1 - \frac{\Delta r}{\rho_n} \right)$$

et d'autre part :

$$(73) \quad C_n \frac{\Delta V_n}{\Delta t_e} = (V_{n+1} - V_n) \frac{1}{R_{n+1}} - (V_n - V_{n-1}) \frac{1}{R_n}.$$

De même :

$$(91) \quad \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{1 - \frac{\Delta r}{\rho_n}}{1 + \frac{\Delta r}{\rho_n}} = \frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n+1}}$$

et

$$(92) \quad \frac{\Delta t_e}{\Delta t_t} = \frac{a}{(\Delta r)^2} R_n C_n \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} = \frac{a}{(\Delta r)^2} R_{n+1} C_n \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$$

que l'on peut écrire encore :

$$(93) \quad R_{n+1} C_n \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = R_{n+1} C_{n+1} \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}$$

d'où :

$$(94) \quad \frac{C_{n+1}}{C_n} = \left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \right)^2.$$

Le rapport des résistances vraies $R_{v_{n+1}}$ et R_{v_n} s'exprime par :

$$(95) \quad \frac{R_{v_{n+1}}}{R_{v_n}} = \frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\rho_{n+1}} \bigg/ \frac{1}{\rho_{n-1}} - \frac{1}{\rho_n} = \frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n+1}}.$$

La méthode des différences finies donne donc pour la sphère :

- 1°) des résistances égales aux résistances vraies,
- 2°) des capacités proportionnelles au carré du rayon moyen correspondant,
- 3°) un rapport des temps tel qu'indiqué par la formule (92).

Le rapport des capacités vraies est de :

$$(96) \quad \frac{C_{v_{n+1}}}{C_{v_n}} = \frac{r_{n+2}^3 - r_{n+1}^3}{r_{n+1}^3 - r_n^3} = \frac{r_{n+2}^2 + r_{n+2} r_{n+1} + r_{n+1}^2}{r_{n+1}^2 + r_{n+1} r_n + r_n^2}$$

alors que, par les différences finies :

$$(97) \quad \frac{C_{n+1}}{C_n} = \left(\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \right)^2 = \left(\frac{r_{n+2} + r_{n+1}}{r_{n+1} + r_n} \right)^2.$$

C'est la situation inverse pour le cylindre, où ce sont les capacités qui ont la valeur vraie et non les résistances.

Si le morcellement part du centre on obtient alors, avec les mêmes notations [55] :

$$(98) \quad \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{n-1}{n+1} \quad \rho_n = n \Delta r \quad R_n = R \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \quad R_2 / R_3 / R_{4...} = \frac{1}{2} / \frac{1}{6} / \frac{1}{12} \dots$$

$$(99) \quad \frac{C_{n+1}}{C_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \quad C_n = n^2 C \quad C_1 / C_2 / C_{3...} = 1/4/9...$$

La formule (92) donne :

$$(100) \quad \frac{\Delta t_e}{\Delta t_t} = \frac{a}{(\Delta r)^2} R_n C_n \frac{n-1}{n} = \frac{R C a}{(\Delta r)^2}$$

R et C étant des valeurs de référence.

La résistance R_1 est naturellement infinie (résistance vraie). La capacité C_o est donnée par les équations (90) et (73) écrites pour le centre :

$$(101) \quad \frac{1}{a} \frac{\Delta T_o}{\Delta t_t} = \frac{6(T_1 - T_o)}{(\Delta r)^2}, \quad C_o \frac{\Delta V_o}{\Delta t_e} = \frac{V_1 - V_o}{R_1}$$

d'où avec (100) :

$$(102) \quad C_o = C_n \frac{n-1}{6n}, \quad n=1$$

$$C_o = 0.$$

Le coefficient superficiel réduit :

$$m = \lambda / h r_e$$

correspond à une résistance de passage P_e que l'on peut rapporter à la résistance vers l'extérieur R_e , qui vaut :

$$(103) \quad R_e = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{\rho_{e+1}} \right)$$

$$P_e = \frac{1}{4\pi h r_e^2} = \frac{R_e m}{1 - \frac{r_e}{\rho_{e+1}}}$$

MÉTHODE GRAPHIQUE.

Les conditions imposées pour le morcellement graphique de la méthode BINDER SCHMIDT étendue à la sphère viennent de l'espace fictif employé ξ qui y est tel que des tranches $\Delta \xi = \Delta r / r^2$ soient rendues égales par l'emploi d'un papier à abscisses homographiques. D'où, comme pour le cylindre, l'adoption d'égales résistances R pour d'égales tranches en gardant le produit RC constant [22].

D'où des résistances inversement proportionnelles au carré de leur rayon moyen r . Le calcul même à des capacités proportionnelles au carré de leur rayon ρ et le produit $R_n C_n r_n / \rho_n$ est constant, comme pour le cylindre.

Ici donc cette méthode donne des résultats différents : les capacités sont bien celles obtenues par les différences finies, mais les résistances ne sont pas celles des différences finies qui, elles, sont pour la sphère les résistances vraies. Elle n'est donc pas à retenir.

Il reste à envisager la dissemblance entre les capacités vraies et celles obtenues par les différences finies. En fait, il faut remarquer que, pour la sphère, les résistances et capacités données par cette dernière méthode ne dépendent que des ρ (formules 91 et 94). C'est ce qui peut conduire, avec PASCHKIS et HEISLER, à "se poser la question de savoir où se trouve la fin de chaque section, puisqu'en réalité les capacités auraient dû être proportionnelles aux volumes des éléments et localisées au centre de l'élément" [55].

Si la capacité doit être au centre les subdivisions sont alors : $0,5 r, 1,5 r, 2,5 r$ etc. (fig. 36). Les auteurs ont dressé la table des rapports des quotients successifs C_n/C_1 pour les deux expressions : C_v et C_0 correspondant à ce morcelage des sections. Ces rapports chiffrent l'erreur commise suivant l'ordre de la section, à partir du centre. Cette erreur, que l'on peut poser nulle au premier rapport, s'élève pour la douzième section à 7,7%. Les auteurs déplacent ensuite les limites des sections – les capacités restant espacées régulièrement de $\Delta r = \rho_n/n$ – et les placent à

$$0,45 r, 1,45 r, 2,45 r \text{ etc.}$$

Les rapports accusent alors des erreurs plus petites : 1,5% au maximum. Mais il n'en reste pas moins vrai que les morcellements ainsi obtenus conduisent à un nombre de sections assez arbitraire et peu pratique et que, d'autre part, ce sont les valeurs absolues des deux capacités C_0 et C_v qui doivent être en cause.

Si l'on prend une section de largeur telle que :

$$(104) \quad r_p - r_q = \Delta r \quad \text{avec} \quad x_n = \frac{r_p - r_q}{2}$$

on obtient :

$$(69) \quad C_v = \frac{4\pi}{3} (r_p^3 - r_q^3)$$

(105)

$$C_0 = 4\pi \Delta r \rho_n^3$$

(69) s'écrit :

$$(106) \quad C_v = \frac{4\pi}{3} \Delta r (r_p^2 + r_p r_q + r_q^2) = \frac{4\pi}{3} \Delta r \left[3 x_n^2 + \left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 \right]$$

et la différence relative correspondante :

$$(107) \quad \frac{C_v - C_0}{C_0} = \frac{3 x_n^2 + \left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 - 3 \rho_n^2}{3 \rho_n^2}$$

Numérotions les sections à partir du centre avec :

(81)

$$\rho_n = n \Delta r$$

(108)

$$\frac{C_v - C_0}{C_0} = \frac{\left(\frac{x_n}{\Delta r}\right)^2 + \frac{1}{12} - n^2}{n^2}$$

Pour $x_n = \rho_n = n \Delta r$, l'erreur est de (tableau 2) :

$$(109) \quad \frac{C_v - C_0}{C_0} = \frac{1}{12 n^2}$$

On voit que la capacité vraie peut rapidement être confondue avec la capacité des différences finies.

MÉTHODE DU NOMBRE ENTIER DE SECTIONS.

Dans le cas de la sphère, la méthode des différences finies conduisant à une première résistance infinie, à une première capacité nulle et à morcellement difficile, on a pensé y pallier en partie en représentant une sphère creuse ayant une très petite cavité entourant son centre et en extrapolant [55].

Nous avons pensé faire plus simple en prenant a priori un nombre entier de sections de largeur Δr , avec capacités localisées à ρ_n' , au milieu de chacune d'elles (fig. 39, p. 47).

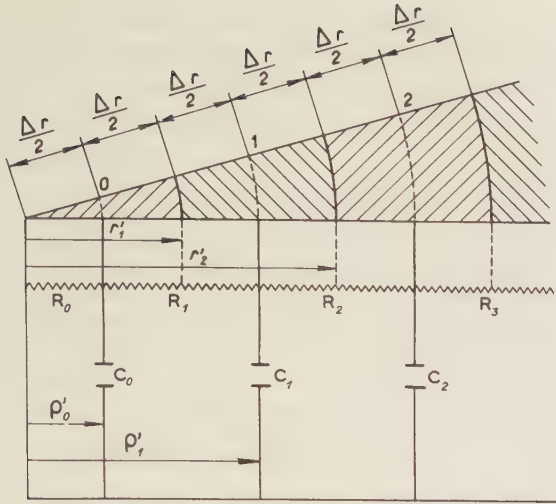


Fig. 39

cylindre nous lui avons également appliqué cette méthode de morcellement avec douze sections et leurs valeurs vraies.

COMPARAISON DES MÉTHODES.

Toujours en régime transitoire, PASCHKIS et HEISLER ont comparé différentes méthodes de morcellement pour des sphères creuses avec la méthode des différences finies [55]. Leurs expérimentations donnent la faveur à cette dernière mais les points de mesure ainsi obtenus présentent encore une assez grande dispersion et d'un autre côté le morcellement conduit, nous l'avons dit, à des nombres peu pratiques.

INFLUENCE DU NOMBRE DE SECTIONS.

Les auteurs aboutissent ici à un nombre de sections égal au moins à 6,45, de préférence 8,45, et s'attachent à examiner l'influence du morcellement non uniforme : près du centre comme à l'extérieur, la subdivision de la première ou de la dernière section n'apporte, semble-t-il, aucun changement appréciable étant donné les imprécisions expérimentales plus grandes que pour le cylindre.

AUTRES CARACTÉRISTIQUES.

Un mur sphérique composé s'obtiendrait par les règles déjà vues. De même que pour le cylindre, les questions de pertes, self-induction, résistance de passage et forme du signal, se traiteraient similairement au cas du mur plan.

2.- RÉSEAUX BI ET TRI-DIMENSIONNELS.

Notre appareillage permet de construire ces réseaux avec le maximum de facilités, alors qu'une installation plus étendue éprouve rapidement de nombreuses limites dues au nombre de nœuds et aux connexions à réaliser entre eux.

a) RÉSEAU BI-DIMENSIONNEL AVEC COORDONNÉES CARTÉSIENNES.

Ils servent à étudier des champs plans ou des coupes suivant un plan dans des corps où les phénomènes thermiques varient imperceptiblement à un instant donné suivant la direction perpendiculaire à ce plan.

Dans ces conditions on a :

$$(110) \quad \rho'_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta r$$

et en transposant les formules (105) et (106), on a (tableau 2) :

$$(111) \quad \frac{C'_v - C'_0}{C'_0} = \frac{1}{12 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

La formule ne s'applique du reste pas à C_0 puisqu'il faut négliger la partie du volume correspondant à R_0 .

C'est cette méthode que nous avons voulu appliquer à la construction d'un réseau qui a servi à la vérification de notre appareillage en prenant systématiquement les valeurs vraies pour six sections ; pour pouvoir faire une expérience identique avec le

Ces réseaux sont en principe composés de mailles carrées de côté Δx formées par des résistances de même valeur R qui représentent la résistivité dans le plan correspondant (fig. 40). En effet, soit σ cette résistivité. La résistance représentée par une maille entre deux de ses côtés, soit R , est égale à :

$$(112) \quad R = \sigma \frac{\Delta x}{\Delta x} = \sigma$$

et ceci quelle que soit la dimension du côté de la maille. L'erreur propre ε présentée par le maillage de ce réseau est facilement calculable [11, 12, 56] pour le régime établi en prenant comme référence l'erreur à un noeud.

Quand les noeuds adjacents sont au bon potentiel :

$$(113) \quad \varepsilon = \frac{(\Delta x)^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = \frac{(\Delta x)^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial y^4}.$$

Le réseau à résistances diagonales de E. PERSICO, déjà cité [12] améliore la précision en doublant le nombre de résistances. L'erreur devient :

$$(114) \quad \varepsilon = \frac{(\Delta x)^8}{10.080} \cdot \frac{\partial^8 V}{\partial x^8} = \frac{(\Delta x)^8}{10.080} \cdot \frac{\partial^8 V}{\partial y^8}$$

pour la relation suivante entre les conductances (fig. 41) : $\left(F = \frac{1}{R}\right)$.

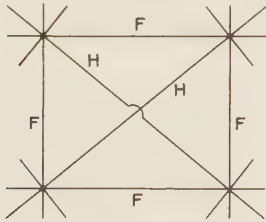


Fig. 41

$$F = 4 H.$$

Ce réseau serait adaptable en régime transitoire avec relativement peu de noeuds.

Les conditions de frontières sont en général assumées par divers systèmes de potentiomètres [5, 9, 10, 11, 12]. Les erreurs ci-dessus doivent être inférieures aux tolérances [56]. Il en sera de même pour les réseaux qui vont suivre. Le calcul exact montre bien l'aspect statistique revêtu par ces erreurs accidentelles [11].

Par exemple avec un réseau pour champs à symétrie axiale de 60×20 mailles construit avec des résistances d'une tolérance de $\pm 1\%$, une précision de 1/1 000 à 1/10 000 est obtenue suivant la nature du champ représenté.

La grandeur à donner aux mailles est une quantité dont l'importance se traduit parfois par la nécessité de resserrer les mailles dans une partie du champ comportant soit des formes difficiles à représenter, soit des gradients élevés, soit de nombreux points particuliers où l'on désire effectuer plus de lectures [57]. Ceci s'applique également à d'autres réseaux.

Le problème est donc de relier, sans introduire d'erreur, deux parties du champ constituées chacune de mailles de dimensions différentes mais dans les deux cas de même résistance R qui sera prise pour unité (des mailles rectangulaires se traiteraient de même façon).

Nous avons envisagé de nombreuses solutions, mais dès que la frontière entre les deux zones fait un angle droit, il n'en reste que quelques-unes de simples. De plus nous n'envisagerons qu'un rapport de longueur des côtés égal à deux, en répétant la division si besoin est. L'erreur, telle que définie ci-dessus, varie comme la puissance quatre du côté de la maille, donc ici comme seize [12].

Par ailleurs, si deux valeurs V_1 et V_2 sont lues au même point d'un réseau avec des mailles de longueurs respectives L et $2L$, une valeur plus exacte est [9, 11].

$$(116) \quad V = V_1 + \frac{1}{3} (V_2 - V_1).$$

Les résistances de liaison entre les deux parties du domaine sont calculées de telle sorte qu'un champ uniforme parallèle à l'un ou à l'autre des axes du quadrillage ne soit pas perturbé par le changement de maillage, en tant que potentiel mesuré aux noeuds, et aussi en tant qu'uniformité de la densité de courant.

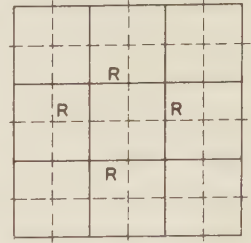


Fig. 40

La figure 42 (p. 50), par exemple, répond à ces conditions. Des valeurs plus simples peuvent être prises : les figures 43 et 44 (p. 50) sont utilisées par M. HUARD DE LA MARRE au Laboratoire de Calcul Analogique de l'Institut BLAISE-PASCAL [14]. Nous avons étendu facilement ces procédés au calcul des résistances pour plusieurs étages successifs avec changement de maillage (fig. 45, p. 50).

Un deuxième procédé ne différant que par la position respective des mailles et des noeuds a été employé [17]. Il utilise des valeurs simples et se prête aux frontières anguleuses.

Les figures 46 et 47 (p. 50) en montrent deux exemples.

Le nombre de mailles à employer est encore fonction du phénomène à représenter et en particulier des résistances de frontières. On peut facilement ramener ce cas au cas uni-dimensionnel en considérant la dimension critique, c'est-à-dire la dimension parallèle à la direction du flux principal. Cette remarque est naturellement valable pour les phénomènes tri-dimensionnels [34].

b) RÉSEAU AVEC SYMÉTRIE AXIALE.

On peut, pour un phénomène de révolution, construire un réseau bi-dimensionnel ayant ses mailles parallèles ou perpendiculaires à l'axe. Les résistances correspondantes peuvent se calculer par l'une des méthodes déjà vues à propos du cylindre. La figure 48 (p. 50) montre un tel réseau, la ligne $n=0$ figurant l'axe de révolution. Les mailles sont des carrés de côtés

$$(117) \quad \Delta r = r_n / n.$$

Les valeurs "vraies" sont telles que :

$$(118) \quad R_n = \frac{1}{2} L_n \frac{n}{n-1}$$

$$(119) \quad Q_n = \frac{1}{2n}$$

à un facteur $1/\lambda \pi \Delta r$ près.

Les valeurs obtenues par la méthode des différences finies sont dans les mêmes conditions :

$$(120) \quad R_n = \frac{1}{2n-1}$$

$$(121) \quad Q_n = \frac{1}{2n}.$$

L'erreur obtenue par cette dernière méthode est de [12, 56] :

$$(122) \quad \varepsilon = \frac{(\Delta r)^4}{48} \left(\frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 V}{\partial r^3} + \frac{\partial^4 V}{\partial r^4} \right)$$

soit avec :

$$\frac{\partial^4 V}{\partial z^4} = \frac{\partial^4 V}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 V}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial V}{\partial r},$$

(Equation valable pour $\Delta^2 V = 0$)

$$(123) \quad \varepsilon = \frac{\Delta r}{48n^3} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{(\Delta r)^2}{48n^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{(\Delta r)^3}{12n} \cdot \frac{\partial^3 V}{\partial r^3} + \frac{(\Delta r)^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial r^4}.$$

L'erreur dépend donc de la dérivée première, tout au moins en régime établi. Les méthodes de PERSICO [12] le conduisent soit à modifier P et Q , soit à introduire des résistances diagonales dans son réseau (fig. 38). Les valeurs correspondantes sont données dans ses tableaux et les erreurs se réduisent respectivement soit à :

$$(124) \quad \varepsilon = - \frac{1}{48n^3 + 2n} \frac{(\Delta r)^3}{6} \frac{\partial^3 V}{\partial r^3} + \frac{(\Delta r)^4}{24} \frac{\partial^4 V}{\partial r^4}$$

pour le réseau sans diagonales, soit à :

$$(125) \quad \varepsilon = \alpha (\Delta r)^4 \frac{\partial^4 V}{\partial r^4}$$

pour le réseau avec diagonales, α étant un très petit coefficient.

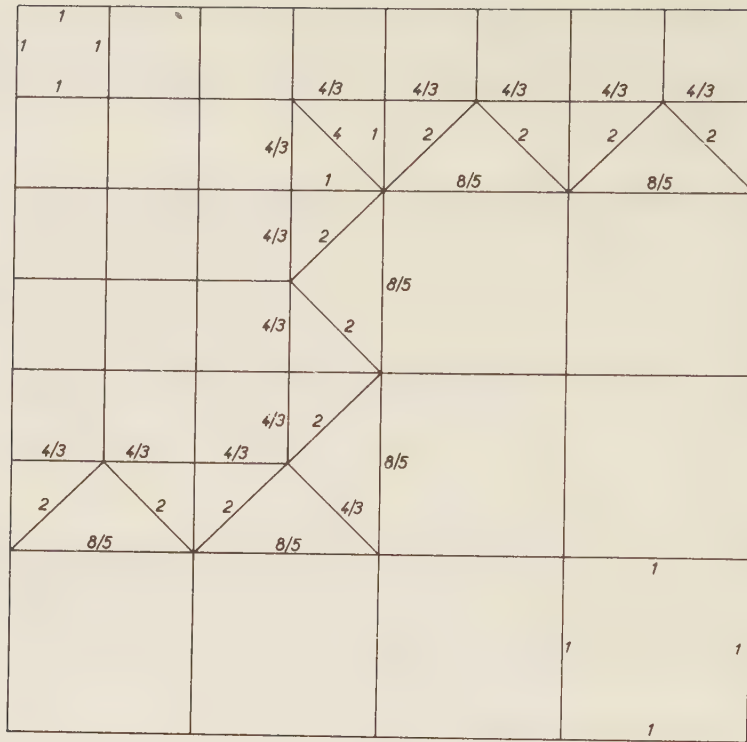


Fig. 42

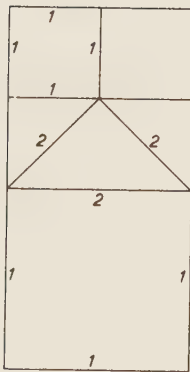


Fig. 43

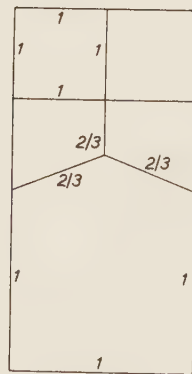


Fig. 44

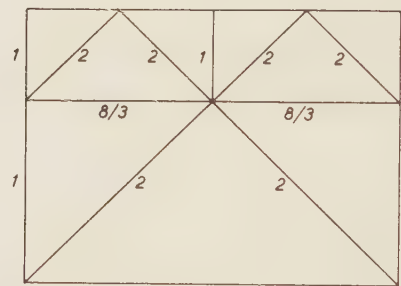


Fig. 45

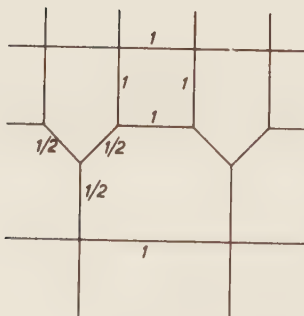


Fig. 46

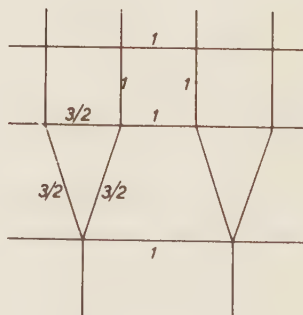


Fig. 47

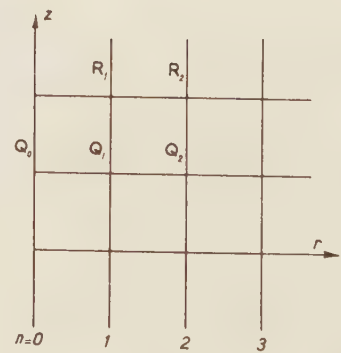


Fig. 48

Ces formes de réseaux seraient utiles dans le cas où il conviendrait de réduire considérablement les noeuds. Elles nous ont par ailleurs servi, comme nous l'avons vu, à définir de nouvelles résistances pour le réseau uni-dimensionnel cylindrique.

c) RÉSEAU TRI-DIMENSIONNEL.

L'utilisation de petits éléments permet seule de réaliser pratiquement la représentation de phénomènes à trois dimensions. Nous connaissons uniquement la réalisation de BROKMEIER [29, 30]. Dans certaines conditions il peut être possible de construire les champs correspondants par un certain nombre de représentations bi-dimensionnelles suivant des plans perpendiculaires. Cette approximation n'est valable que dans des cas particuliers [33, 58].



IV - RÉSULTATS DANS DES CAS THÉORIQUES

1.-VÉRIFICATION DE L'APPAREILLAGE.

Nous avons voulu tout d'abord établir quelles étaient les erreurs propres introduites par l'analyseur et par la lecture des courbes telle qu'elle a été décrite. Pour éliminer de ce fait les erreurs dues aux approximations faites lors de la construction d'un réseau et se placer dans un cas probant, nous avons choisi de relever la courbe de charge d'un condensateur par une résistance :

$$(126) \quad V = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

Les deux éléments utilisés ont été déterminés avec une grande précision et on constate en fait qu'il n'y a que des erreurs accidentelles de lectures qui sont de l'ordre de 1 à 2 pour mille de la tension unité imposée. L'accord des résultats avec la théorie est donc excellent ; les valeurs en question sont reportées au tableau 3.

2.-VÉRIFICATION DE LA CONSTRUCTION DES RÉSEAUX.

Nous avons voulu, pour les trois formes principales du mur plan du cylindre et de la sphère, prendre quelques cas typiques et construire le réseau correspondant. Les résultats ont été comparés avec les valeurs obtenues par le calcul par divers auteurs et utilisés depuis longtemps sous la forme d'abaques bien connus concernant le mur plan d'épaisseur $2L$, le cylindre et la sphère de rayon M dont la température du milieu ambiant varie de T_0 à T_1 .

Les solutions analytiques correspondantes peuvent être calculées de plusieurs façons, par exemple soit pour les temps brefs, soit pour les temps longs du phénomène, ou bien soit pour l'élévation unité, soit pour le chauffage avec élévation à vitesse constante [2].

Les calculs ont été faits également pour les équations aux différences finies, correspondant aux réseaux morcelés par exemple : [2, 29].

Ces abaques utilisent des variables réduites (sans dimensions) que nous rappelons :

$$(127) \quad \text{— pour le temps : } \chi = at/L^2 \text{ ou } at/M^2$$

$$(128) \quad \text{— pour l'espace : } N = x/L \text{ ou } r/M$$

$$(129) \quad \text{— pour la température : } \theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$$

$$(130) \quad \text{— pour la résistance de surface : } m = \lambda/hL \text{ ou } \lambda/hM.$$

Certains abaques donnent $1-\theta$; d'autres utilisent l'inverse de m . Ils donnent en général les valeurs voulues pour une valeur de N , le plus souvent $N=1$ (surface du corps) ou $N=0$ (centre, axe ou plan médian).

Il reste donc trois formes pour présenter les courbes :

$\theta = f(\chi)$, avec m comme paramètre (abaques de GURNEY LURIE [53] ; HEISLER [28, 59] ; WILLIAMSON-ADAMS [53, 54] ; HOTTEL [53]).

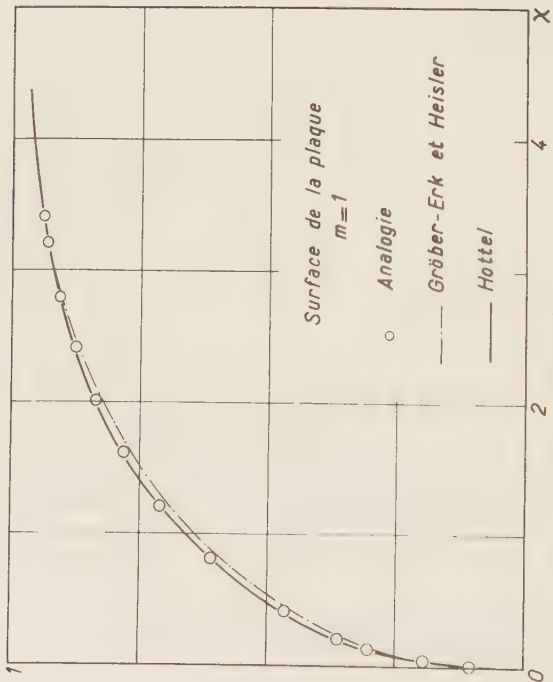


Fig. 49

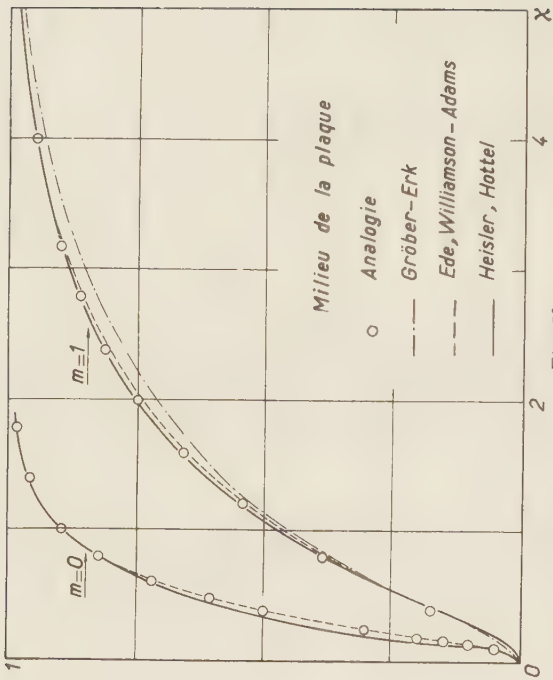


Fig. 50

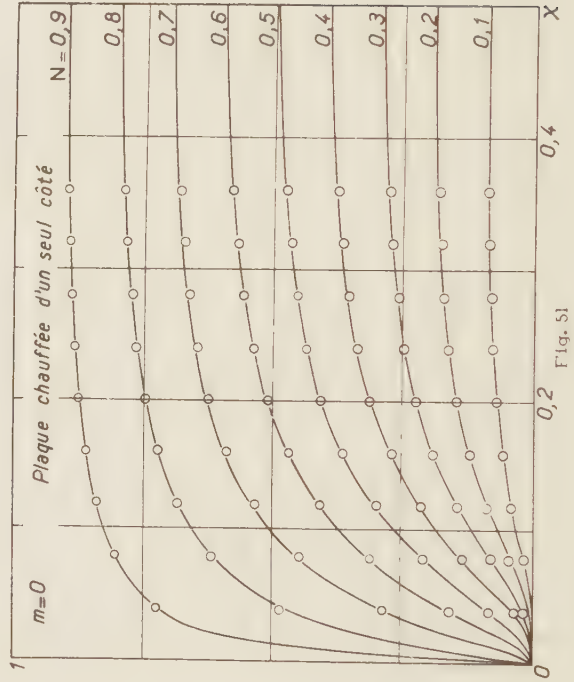


Fig. 51

$\theta = f(m)$, avec χ comme paramètre (abaques de GROBER-ERK [60]).

$\chi = f(m)$, avec θ comme paramètre (abaques de EDE [61]).

Nous dirons seulement que ces diverses formes d'abaques offrent chacun leurs avantages et leurs inconvénients et sont à choisir suivant le cas traité.

a) PLAQUE CHAUFFÉE SYMÉTRIQUEMENT.

Le réseau correspondant à l'allure de la figure 28. Il représente la demi-épaisseur de la plaque : $L = n\Delta x$. Il reçoit le signal unité par la résistance de surface P_1 et est isolé sur le plan médian : $P_2 = \infty$.

Nous avons pris douze sections complètes et identiques et recherché l'élévation de température au plan médian ($N=0$) pour $m=0$ et $m=1$ et à la surface ($N=1$) pour $m=1$.

Il a paru intéressant de montrer sur cet exemple comment peut être établie la correspondance des échelles des temps.

Le temps réduit est :

$$(127) \quad \chi = at/L^2.$$

La quantité électrique correspondante est :

$$(131) \quad \chi = t/r_0 c_0 L^2$$

avec

$$r_0 L = nR \quad \text{et} \quad c_0 L = nC,$$

soit

$$(132) \quad \chi = t/n^2 RC.$$

Le temps dans l'analyseur est mesuré par un potentiomètre gradué de 0 à 1 de telle façon que l'échelle totale soit parcourue, comme nous l'avons vu, en 1/100^{ème} de seconde pour la vitesse 1. Le temps dans l'analyseur sera donc mesuré par la quantité :

$$(133) \quad t = 10^{-2} \frac{\tau}{\gamma}, \text{ en secondes}$$

τ étant la valeur lue sur le potentiomètre de l'échelle des temps et γ le rapport de la boîte de vitesse (1, 1/2, 1/4 ou 1/8).

D'où la valeur de χ :

$$(134) \quad \chi = 10^{-2} \frac{\tau}{\gamma} \frac{1}{n^2 RC}.$$

La résistance de passage P est fonction de $m = \lambda/hL$. En transposant, on a immédiatement :

$$(135) \quad P = mnR.$$

Les résultats sont donnés sur les figures 49 et 50 (p.54).

b) PLAQUE CHAUFFÉE D'UN SEUL COTÉ.

Le réseau correspondant comprend dix sections égales dont la dernière est en court-circuit. Les élévations de température en chacune des sections ont été relevées pour $m=0$ et comparées aux courbes calculées pour un circuit morcelé de $n=10$ dans les mêmes conditions [29]. Les résultats correspondants sont reportés sur la figure 51 (p.54). On constate de légères divergences mais l'espacement des neuf courbes varie d'une façon plus régulière en ce qui concerne nos points expérimentaux que pour les courbes calculées par l'auteur à partir d'un développement en série où seuls les premiers termes ont été conservés.

c) CYLINDRE

Nous avons comparé pour le cylindre les résultats obtenus par différentes méthodes de morcellement :

- méthode des différences finies avec $n=11,5$ (fig. 36),

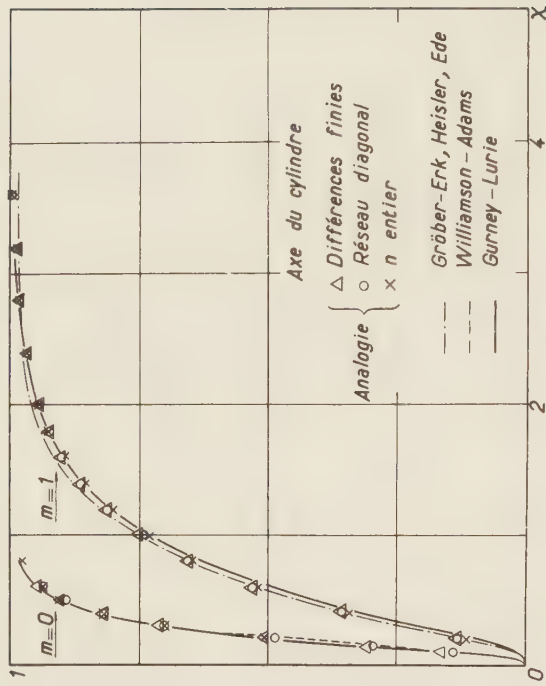


Fig. 52

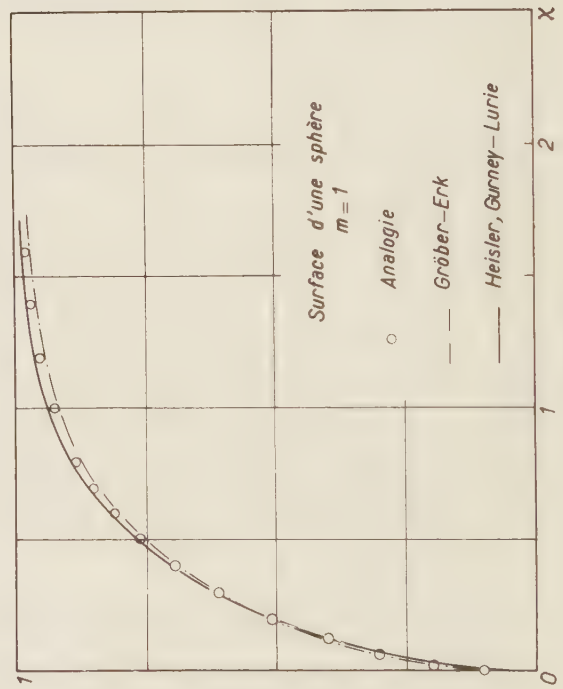


Fig. 54

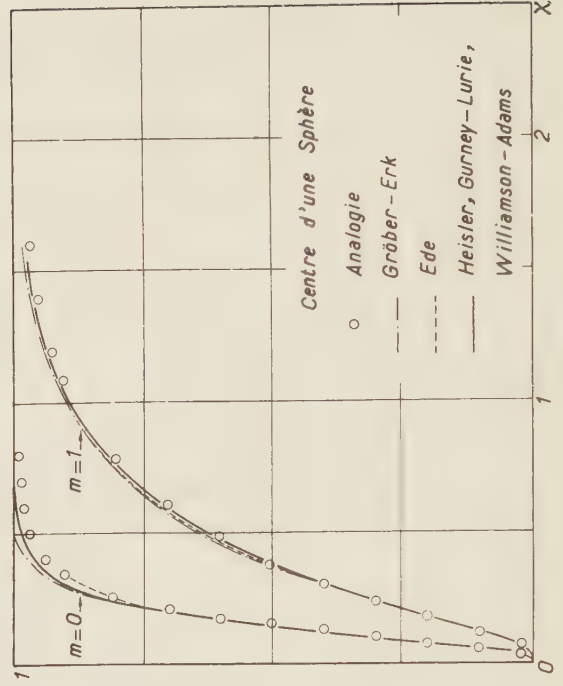


Fig. 55

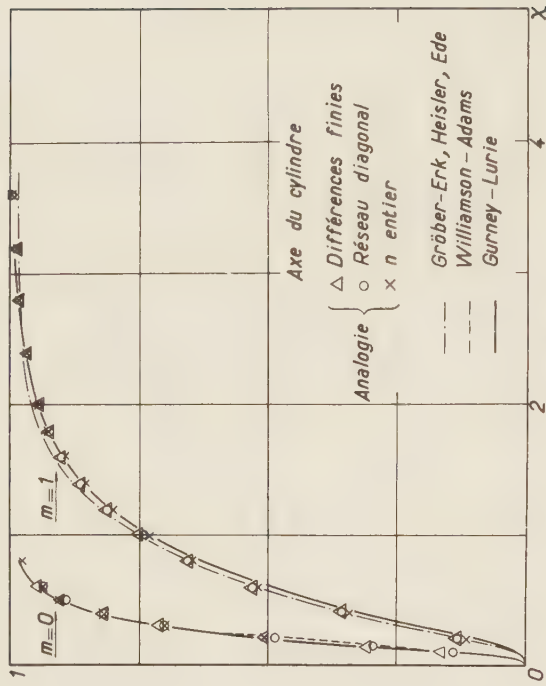


Fig. 53

- méthode du réseau diagonal et $n=11,5$ (fig. 36),

- méthode du nombre de sections entier, avec les valeurs vraies, pour $n=12$ (fig. 39).

On peut remarquer que pour les deux premières méthodes les différences sont surtout sensibles au centre du corps (axe) et pour une résistance superficielle nulle (fig. 52 et 53, p.56). Les écarts entre les courbes théoriques ne permettent pas de trancher délibérément, mais il semble que la méthode adaptée du réseau diagonal de E. PERSICO donne de bons résultats.

Les éléments du réseau se calculent à partir des formules suivantes qui se rattachent aux éléments "vrais" :

$$(136) \quad \chi = \frac{a t}{M^2} \quad \text{ou} \quad \chi = \frac{t}{r_o c_o M^2}$$

avec, pour une résistance quelconque R_k située entre r_j et r_k :

$$(137) \quad R_k = \frac{r_o}{2\pi} L_n \frac{r_k}{r_j}$$

et la capacité correspondante :

$$(138) \quad C_k = c_o \pi (r_k^2 - r_j^2)$$

d'où :

$$(139) \quad \chi = \frac{t}{2} \frac{1}{R_k C_k} \cdot L_n \frac{r_k}{r_j} \cdot \left(\frac{r_k^2 - r_j^2}{M^2} \right)$$

et de même :

$$(140) \quad m = \frac{P}{R_k} \cdot L_n \frac{r_k}{r_j}$$

La formule (133) donnant le temps dans l'analyseur est naturellement inchangée.

d) SPHÈRE.

Nous avons ici :

$$(141) \quad \chi = \frac{t}{3} \frac{1}{R_k C_k} \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_k} \right) \frac{(r_k^3 - r_j^3)}{M^2}$$

et

$$(142) \quad m = \frac{P}{R_k} M \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_k} \right).$$

Les résultats ont été obtenus par le morcellement en un nombre entier de sections que nous avons voulu limiter à six en employant les valeurs "vraies" comme il a été précédemment expliqué lors de l'étude de la sphère (fig. 39, 54 et 55). Les résultats obtenus par un réseau de cette sorte peuvent être considérés comme bons étant donné les divergences entre les courbes théoriques des différents auteurs. On peut remarquer à ce propos, et ceci est valable pour tous les autres abaques possibles, que quelques journées de travail à l'aide de l'analyseur auraient donné, avec une précision comparable, ces très nombreuses familles de courbes qui ont dû coûter de longs et pénibles calculs ; l'analyseur ne prendrait pas plus de temps et serait aussi précis pour tracer de nouveaux abaques inaccessibles au calcul.

V - APPLICATION A L'ÉTUDE DES CHOCS THERMIQUES DANS DES ÉPROUVETTES PRISMATIQUES DE SECTION CARRÉE

1.- MISE EN ÉQUATION.

Les corps étudiés dans cette application sont des barrettes de matériaux obtenues par frittage à l'O.N.E.R.A., par M. TACVORIAN. Leur section est un carré dont le côté est petit vis-à-vis de leur longueur. Il s'agit donc ici d'un problème bi-dimensionnel puisque toute l'éprouvette est soumise au même choc thermique que nous représenterons par une brusque élévation de température de 0 à 1. Le problème est donc caractérisé par la dimension du carré, de côté $2L$ et par les constantes thermiques du corps qui sont :

- conductibilité calorifique λ
- chaleur spécifique c
- masse spécifique ρ
- résistance de passage par unité de surface $1/h$.

Considérons une section quelconque de la barre. Nous voyons tout d'abord que le phénomène est symétrique par rapport aux axes et aux diagonales du carré ; nous ne représenterons donc qu'un huitième de la section (fig. 56).

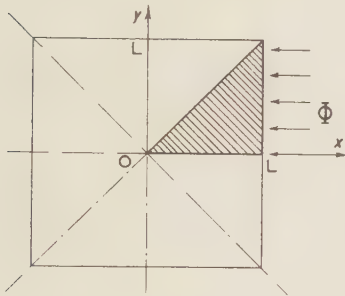


Fig. 56

Le corps est représenté par un réseau à éléments localisés. La section carrée est morcelée en un nombre n de mailles de longueur Δx pour le demi-côté L ; la section complète en comprendra donc $2n \times 2n = 4n^2$. Nous avons pris $2n=11$, chiffre suffisamment élevé pour ce cas et permettant la construction d'un réseau simple avec un noeud au centre.

Représentons figure 57 une rangée de n mailles carrées. Elles occupent dans le corps un petit prisme de section ΔS et de longueur L . Chacune de ces mailles est formée d'une résistance R et d'une capacité C placée en son milieu et l'on a, comme pour la plaque :

$$(41) \quad \frac{t_e}{t_i} = a \frac{RC}{\Delta x^2}$$

soit pour le prisme de longueur $L=n$:

$$(143) \quad \frac{t_e}{t_i} = \frac{a n^2 RC}{L^2}.$$

On emploiera le temps thermique réduit X rapporté à une longueur de référence, ici L , le demi-côté :

$$(144) \quad X = \frac{a t_i}{L^2} = \frac{t_e}{n^2 RC}$$

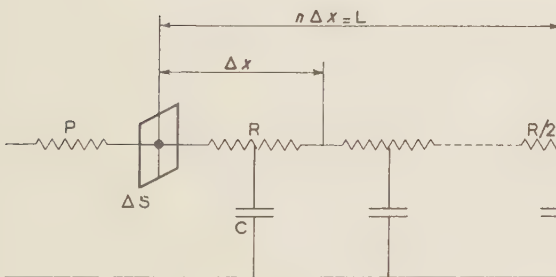


Fig. 57

de même :

$$(145) \quad m = \lambda/h L.$$

Dans le cas où $m \neq 0$ une résistance P alimente chaque noeud de maille se trouvant sur un côté de la section carrée.

On a immédiatement :

$$(146) \quad m = \frac{\lambda \Delta S}{L} \cdot \frac{1}{h \Delta S} = \frac{P}{n R}.$$

Le flux Φ entrant dans le corps normalement à une surface ΔS est donné par la condition de continuité :

$$(147) \quad \frac{\Phi}{\Delta S} = \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} = h (\bar{\theta} - \theta_{x=L})$$

$\bar{\theta}$ étant la température du milieu extérieur qui passe brusquement de 0 à 1 au début du phénomène. Pour prendre la variable réduite x/L (ou y/L) on posera simplement ici $L=1$.

La détermination des contraintes apparaissant dans le corps, lors d'un choc thermique et modifiant ainsi ses propriétés mécaniques, fait intervenir les gradients de température. On sait que les plus forts gradients se produisent au voisinage de la surface et plus particulièrement suivant les axes ox , oy .

Nous étudierons donc les gradients $\partial\theta/\partial x$ pour diverses valeurs de m , résistance de surface ramenée à la résistance du corps.

La formule (147) s'écrit encore :

$$(148) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_1 = \frac{h}{\lambda} (1 - \theta_1).$$

Elle est valable aux points $x=1$. Le gradient initial peut s'en déduire, puisque θ est nul dans tout le corps à l'application du choc thermique. Il vaut :

$$(149) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_1 = \frac{h}{\lambda} = \frac{1}{m L}, \quad \tau=0.$$

Mais il est loin de rendre compte à lui seul de l'ensemble du choc thermique. Il est connu, par ailleurs, que pour une résistance superficielle nulle, le gradient est infini au début du phénomène. Comme dans ce cas la première maille reçoit directement le signal unité et que ses dimensions finies ne peuvent que faire apparaître un gradient fini $\Delta\theta/\Delta x$, on conçoit que l'étude du flux dans le cas de $m=0$ est le plus mauvais cas possible qui puisse se rencontrer dans ces analogies électriques. On verra pourtant comment ce problème a pu être résolu avec une précision suffisante par quelques simples considérations sur ses aspects physiques les plus importants au moment du choc.

2.- EXPÉRIMENTATION.

Le temps donné par l'analyseur est :

$$(133) \quad t_e = 10^{-2} \frac{\tau}{\gamma}, \text{ en secondes}$$

γ étant un rapport de vitesses ici égal à 1/2 et le temps thermique réduit :

$$(144) \quad \chi = \frac{a t_e}{L^2} = \frac{t_e}{n^2 R C}.$$

Nous avons pris pour chaque maille :

$$R = 100\,000 \text{ ohms}, \quad C = 0,01 \text{ } \mu\text{F},$$

d'où en exprimant le produit RC en mégohms $\times \mu\text{F}$:

$$(150) \quad \chi = \frac{t_e}{(5,5)^2 (0,1) 10^{-2}} = 33,06 t_e$$

soit, avec (133) :

$$(151) \quad \chi = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 33,06 \tau = 0,6612 \tau.$$

Tout changement de vitesse équivaut à une multiplication de τ . Etant donné que, dans cette application, de nombreuses courbes montent très rapidement à partir de l'origine, nous avons adopté pour l'ensemble le processus suivant pour relever ces courbes d'élévation de température en différents points du corps.

L'élévation totale de θ de 0 à 1 est partagée en dix niveaux de 0,1 en 0,1, affichés successivement sur le potentiomètre étalonné des températures (ce dernier pourrait du reste, on l'a vu, indiquer par une commutation les valeurs complémentaires à 1, si un problème de refroidissement était explicitement traité comme tel).

On lit les temps correspondants, directement en valeurs des τ de 0 à 1.

Etant donné le grand nombre de courbes tracées et l'aspect général du problème, nous avons conservé comme temps réduit cette valeur de τ dans un but de simplification. La valeur de χ , d'un emploi plus classique, s'en déduirait lors de l'extraction d'un résultat partiel par la formule (151).

En particulier, dans le cas d'une résistance superficielle nulle ($m=0$), le refroidissement du centre de différents solides simples, de $\bar{\theta}=1$ à 0, a été calculé par WILLIAMSON-ADAMS. On trouve les résultats soit sous forme de courbes, difficilement exploitables pour les temps faibles [53], soit sous forme de tableaux [54].

Pour transformer en élévation de température, on a pris $\theta=1-\bar{\theta}$. Ce cas nous a servi de comparaison avec nos résultats.

3. - CONSTRUCTION DU RÉSEAU.

La figure 58 représente le réseau qui occupe le huitième de la section carrée. Cette dernière possède $2n \times 2n = 4n^2 = 121$ mailles. La maille centrale permet d'accéder directement au centre mais cette disposition n'est pas obligatoire. Dans la direction ox , les résistances R ont été fractionnées par moitié pour atteindre le potentiel à la frontière de deux mailles consécutives. Comme on a posé $L=1$, ces frontières ont une abscisse égale à un nombre impair de onzièmes alors que les noeuds (centre des mailles) ont des coordonnées paires, toujours en onzièmes. Les deux résistances aboutissant sur un noeud de la diagonale sont inchangées mais la capacité est réduite de moitié. Les résistances se trouvant sur l'axe ox sont doublées et les capacités réduites de moitié, sauf la capacité centrale égale au huitième de celle d'une maille entière. Les résistances ont une précision de 0,2% et les capacités de 1%.

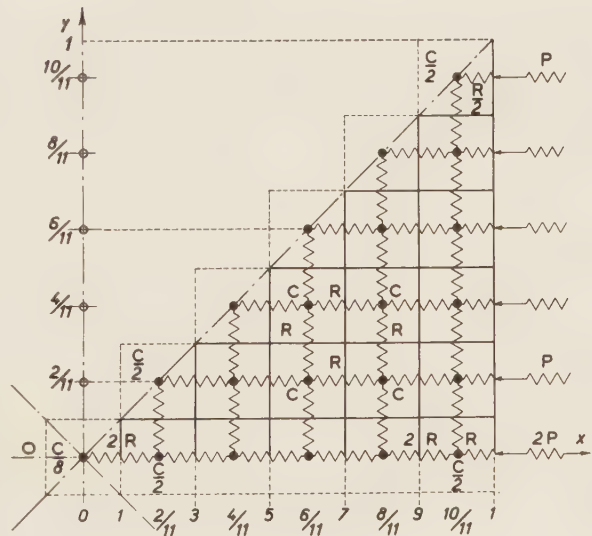


Fig. 58

Les résultats ont été relevés pour trois valeurs caractéristiques de m :

$$m = 0$$

$$m = 0,1 \quad (\text{valeur relativement petite})$$

$$m = 1 \quad (\text{valeur déjà grande}).$$

4. - RÉSULTATS POUR $m=0$

a) COURBES D'ÉLEVATION DE TEMPÉRATURE.

On trouvera d'abord pour $m=0$ l'élévation au centre de la barre, comparée aux valeurs de WILLIAMSON-ADAMS, déduites d'une courbe [53] ou d'un tableau [54].

Exceptionnellement, le temps réduit est ici χ et on a relevé θ_0 pour des τ correspondant au χ voulu. Les $\tau > 1$ impliquent un changement de vitesse, donc d'échelle des temps à un endroit de la courbe. De tels changements de vitesses sont fréquents et indécélables sur les courbes. Ces premiers résultats sont reproduits sur la figure 60.

Pour $m=0$, les courbes suivantes donnent les θ en fonction de τ pour un x et un y donné. Elles sont rassemblées par même valeur de y (fig. 61 à 66).

On constatera la très grande diversité de ces courbes de température due au fait que $m=0$.

b) CHAMP DES ISOTHERMES.

La répartition des isothermes à divers instants τ donnés fournit une idée exacte de l'ensemble du phénomène. Ces champs ont été déduits, pour quatre valeurs de τ , d'une série de courbes intermédiaires tracées pour chacune de ces valeurs.

Pour un τ donné et pour les diverses valeurs de y , on trace la courbe $\theta=f(x)$ (suivant la droite pleine sur la figure 59). Etant donné la symétrie par rapport à la diagonale, on obtiendrait le même résultat en interchangeant x et y (droite pointillée). Les courbes intermédiaires seront donc composées de valeurs relevées sur les deux parties de droites comprises dans le huitième exploré. Le raccordement est excellent et les points de raccordement, pour lesquels $x=y$, définissent la température le long de la diagonale du carré, de même que la courbe $y=0$ la définit suivant son axe, toujours pour le même temps τ .

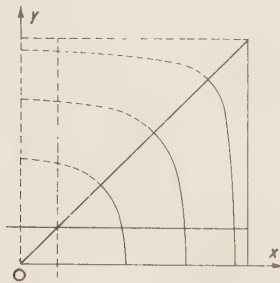


Fig. 59

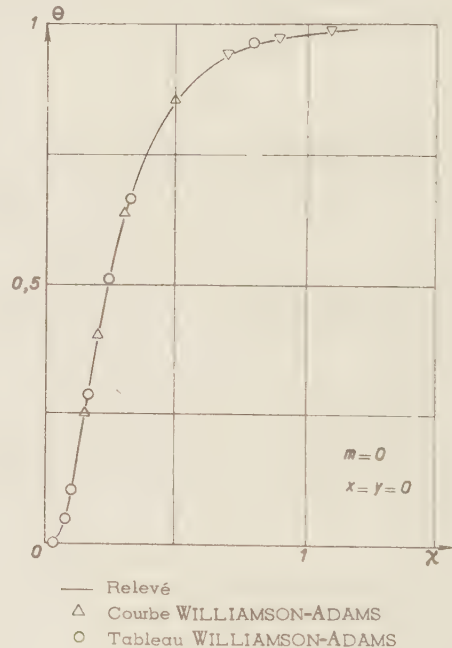


Fig. 60

Les figures 67 à 70 sont les courbes intermédiaires correspondant aux temps :

$$\tau = 0,02 - 0,1 - 0,2 - 0,3.$$

Les figures 71 à 74 sont les champs d'isothermes qui leur correspondent respectivement. On trouvera aussi la figure 75, correspondant à l'axe et à la diagonale pour les quatre temps choisis.

c) FLUX THERMIQUES ET GRADIENTS.

Nous avons vu que pour $m=0$ le flux initial était théoriquement infini à la surface du corps et que le morcellement du réseau en mailles de dimensions finies se présentait alors dans le plus mauvais cas. Pour m petit, c'est encore un mauvais cas, mais le relevé de la température

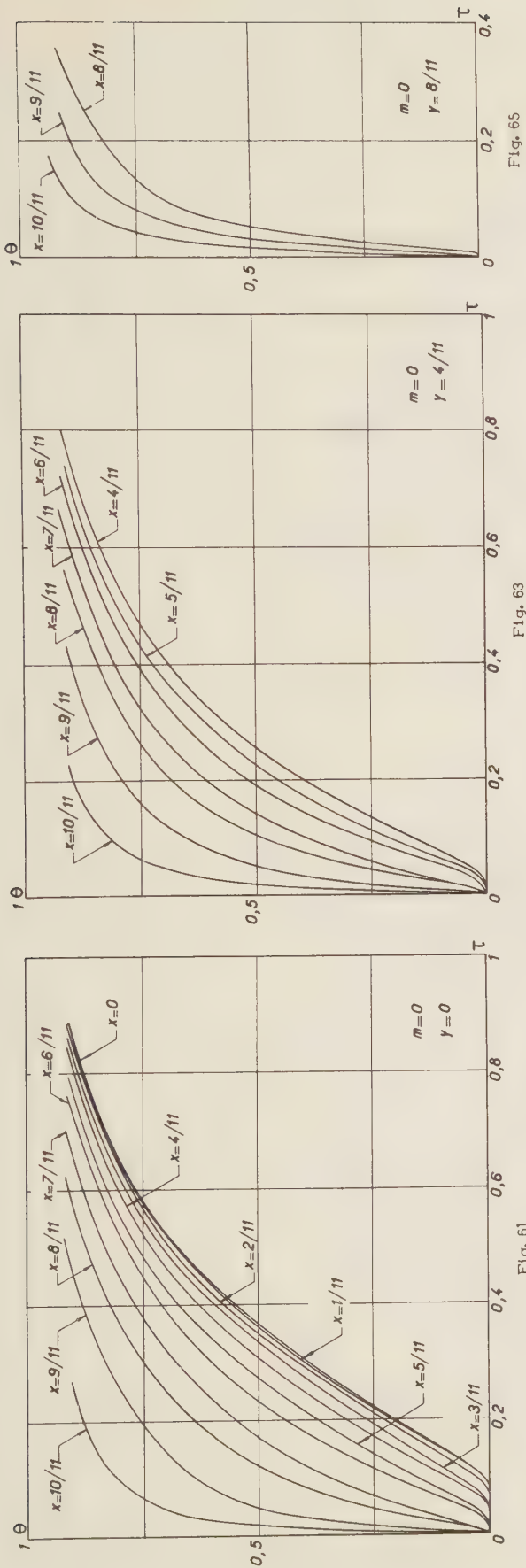


Fig. 63

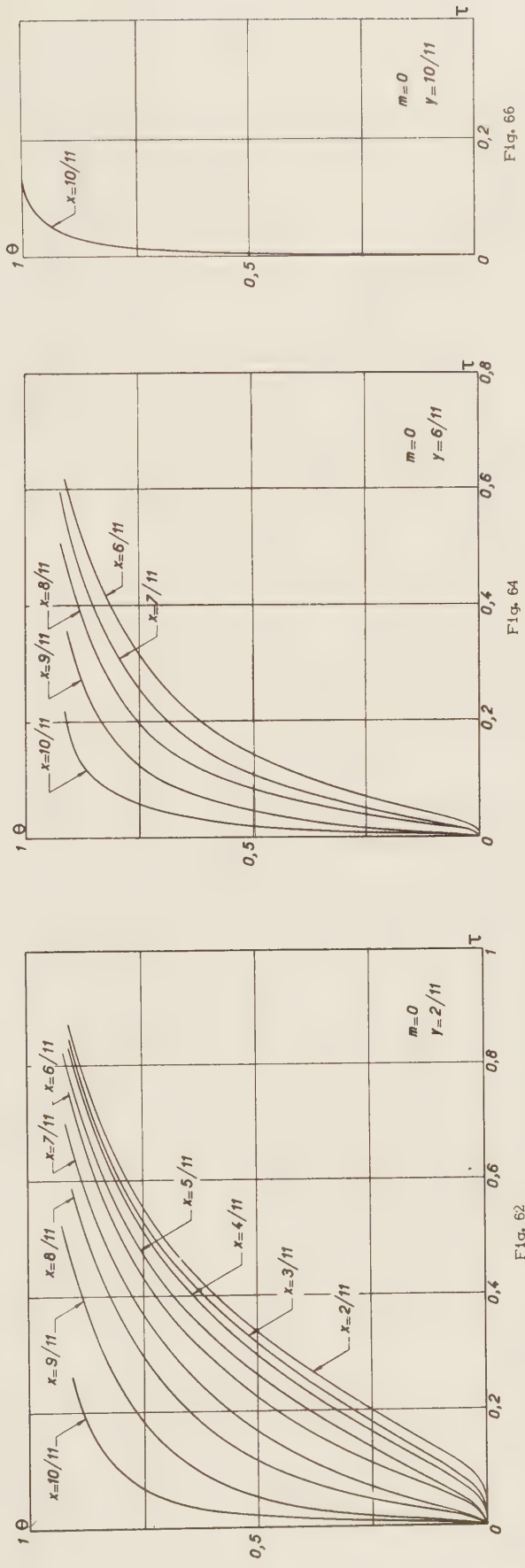


Fig. 64

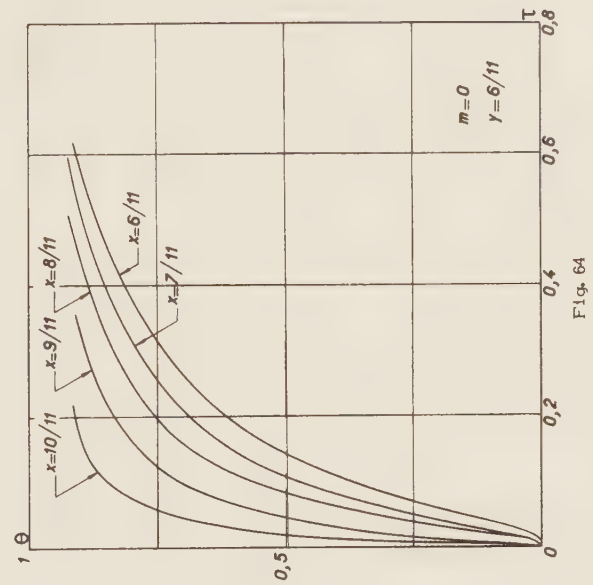


Fig. 66

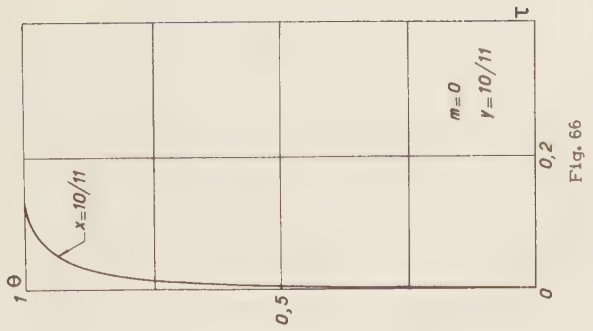
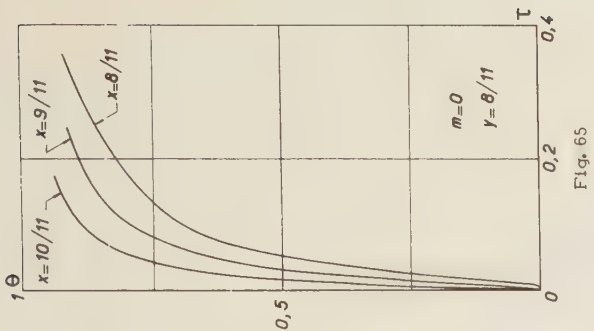


Fig. 65



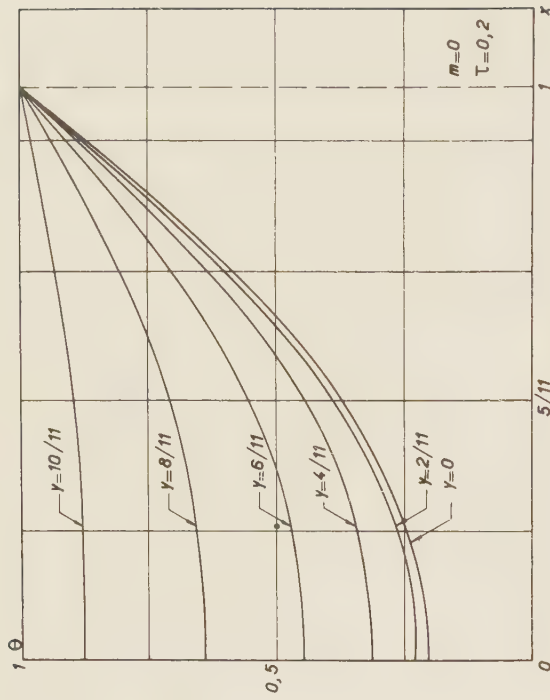


Fig. 69

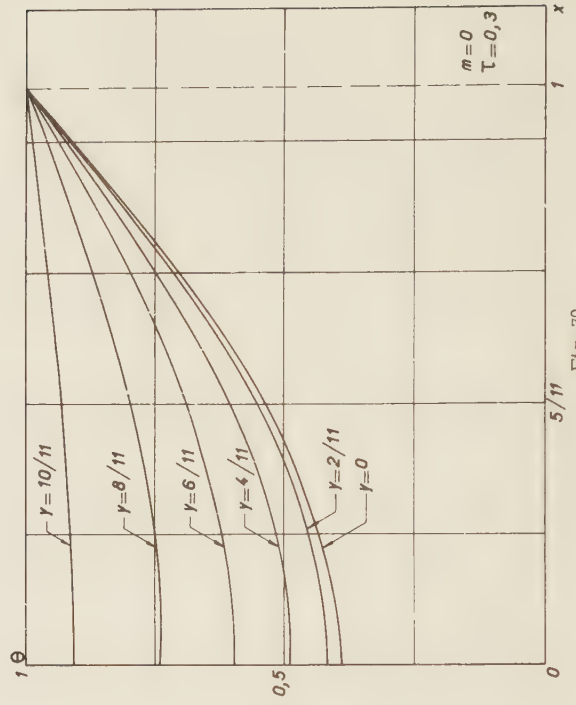


Fig. 70

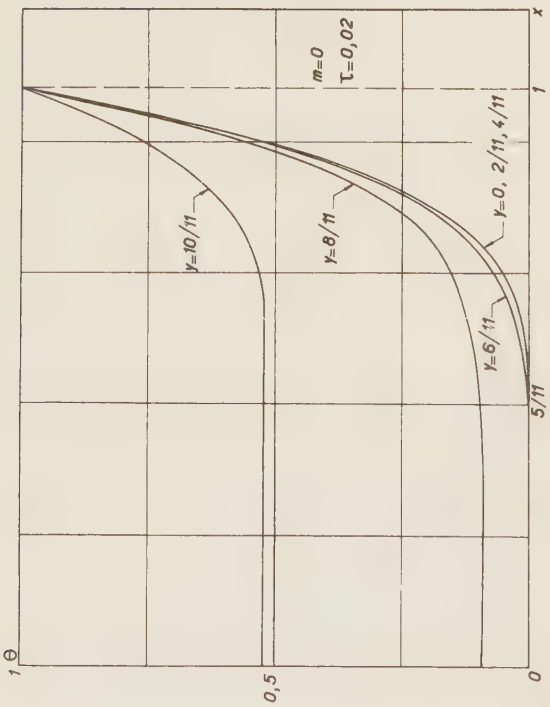


Fig. 67

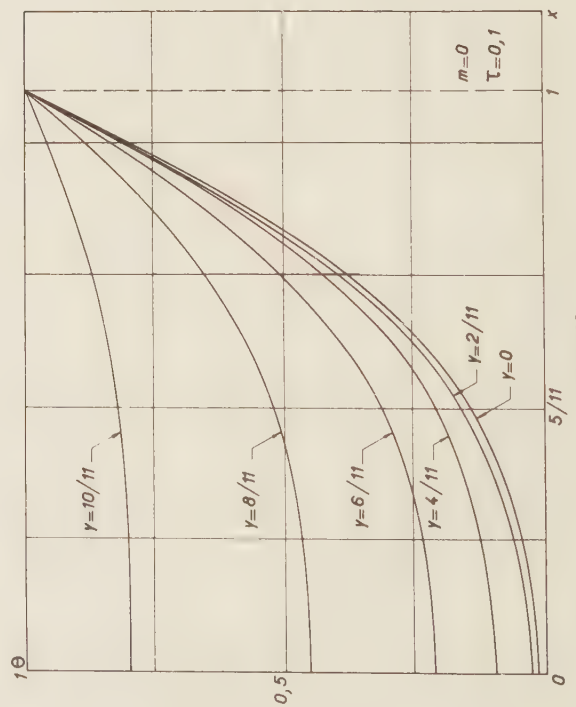
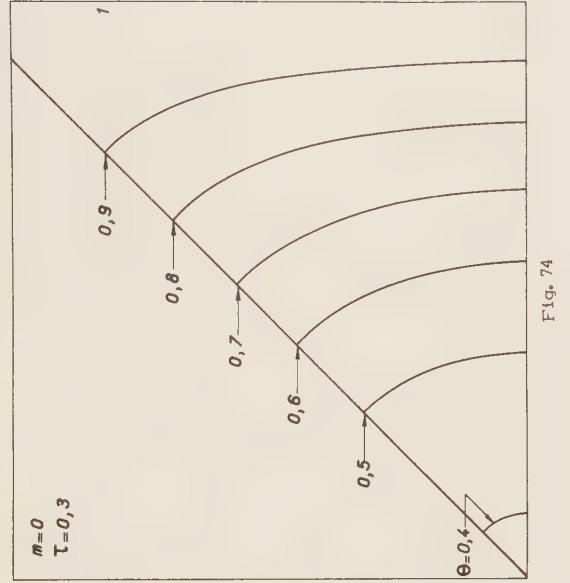
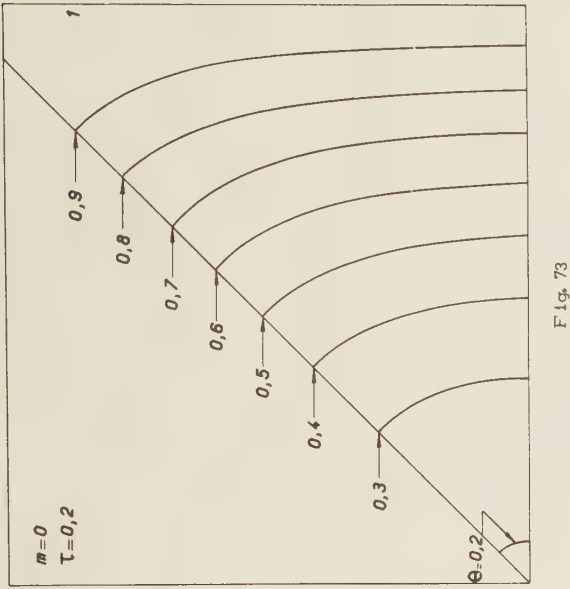
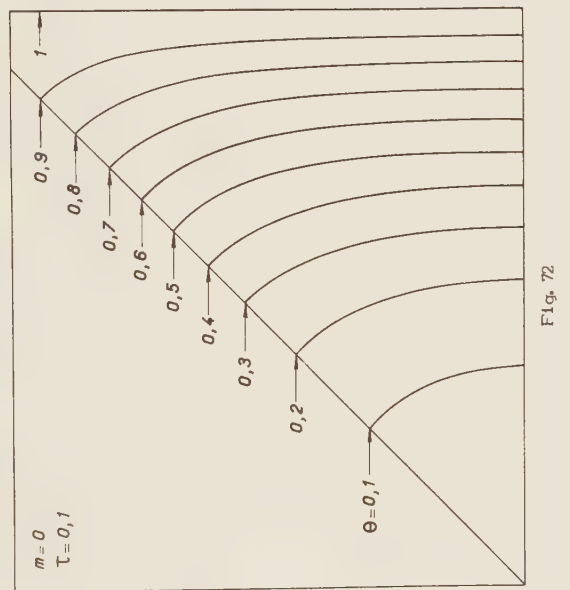
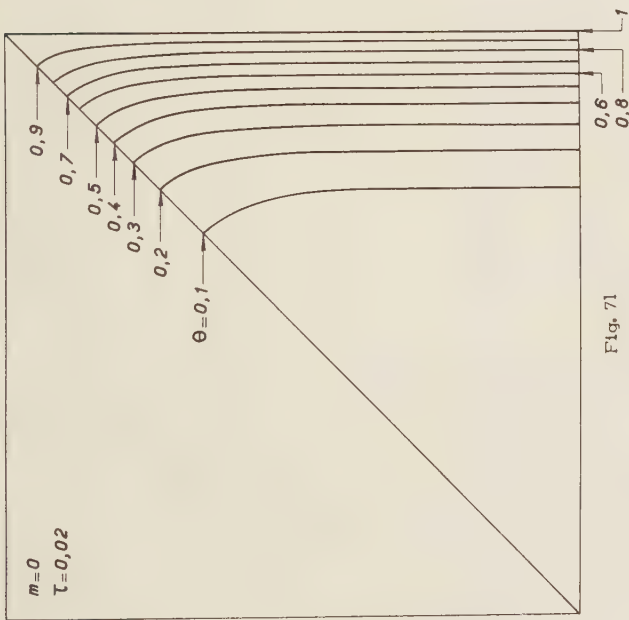


Fig. 68



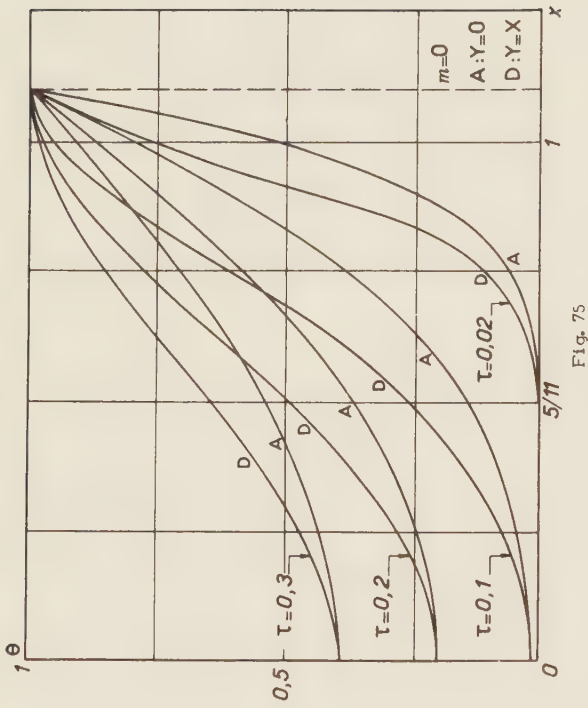


Fig. 75

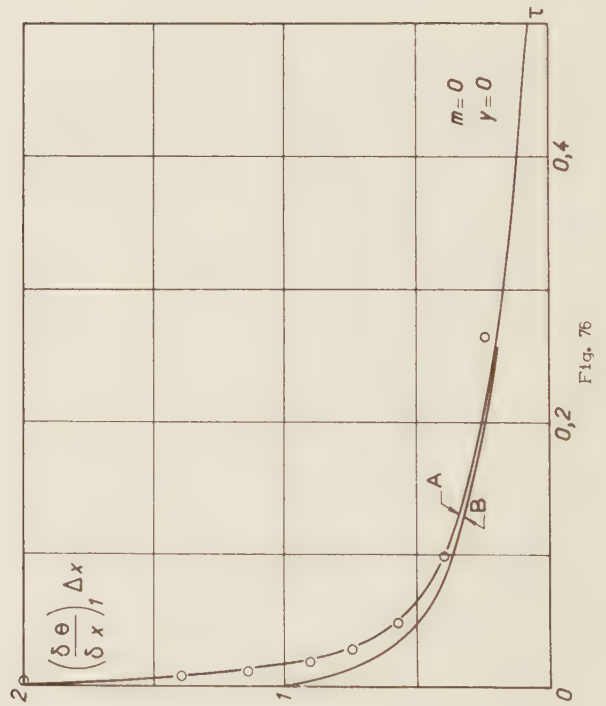


Fig. 76

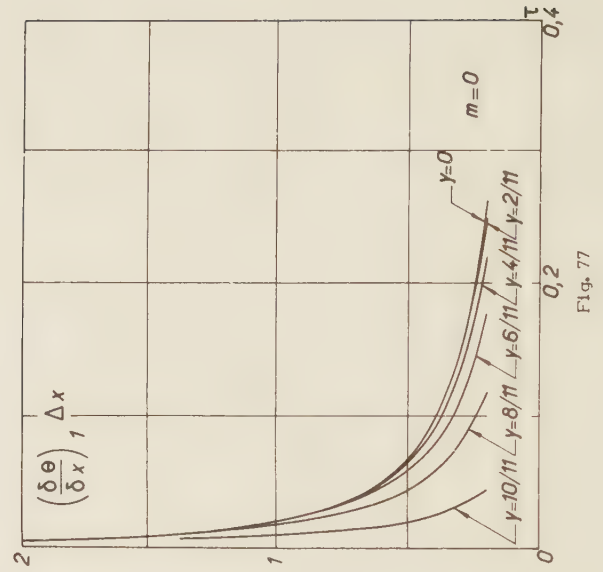


Fig. 77

à la surface permet cependant des mesures satisfaisantes comme nous le verrons.

Pour $m=0$, il faut prendre une différence finie vers l'intérieur du corps puisqu'il n'y a pas de résistance de passage avant la surface. Le quotient $\Delta\theta/\Delta x'$ correspondant est tel, que l'on a toujours, quelle que soit la longueur $\Delta x'$: $\Delta\theta=1-\theta'=1$ initialement. On ne peut diminuer indéfiniment $\Delta x'$ et il faut s'arrêter au minimum à une demi-maille, soit à :

$$x = 10/11, \quad \Delta x' = \Delta x/2$$

ou, si l'on prend une maille, à :

$$x = 9/11, \quad \Delta x' = \Delta x.$$

Les courbes de gradients à la surface pour $m=0$ et divers $\Delta x'$ ne seront donc confondus et valables qu'au bout d'un certain temps. Nous pouvons cependant tracer le début du phénomène avec toute précision en considérant qu'il est en concordance avec un cas théorique connu : celui du mur plan indéfini. Cette hypothèse est d'autant plus valable que l'on se rapproche du milieu du côté, $y=0$, comme le prouve le champ des isothermes pour $\tau=0,02$: quand y augmente elles restent très longtemps parallèles à la surface, c'est-à-dire au côté du carré. Si l'on se rapproche trop des coins, la concordance n'est vraie que pendant des temps considérablement plus petits. Au voisinage du milieu du côté, elle est vraie tant que le centre de la barre n'est pas atteint par une élévation perceptible de température, ce que l'on peut faire correspondre à un temps de l'ordre de $\tau=0,1$.

Dans les conditions de l'expérience, l'élévation de température en un point u compté à partir de la surface est, pour le mur infini :

$$(152) \quad \theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z e^{-Z^2} dZ$$

avec

$$(153) \quad Z = \frac{u}{\sqrt{4at}} \quad \text{et} \quad u = 1 - x.$$

La densité du flux entrant à la surface est :

$$(154) \quad \frac{\Phi}{\Delta S} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi at}} = \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_1$$

soit :

$$(155) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi at}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \chi L^2}}.$$

Pour rester en variables réduites, nous adopterons maintenant la quantité :

$$(156) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \Delta x \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{L}{n} = \frac{L}{5,5}$$

d'où :

$$(157) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_1 \Delta x = \frac{\Delta x}{L} \frac{1}{\sqrt{\pi \chi}} = \frac{1}{n \sqrt{\pi \chi}},$$

formule que nous utiliserons avec $\chi=0,6612 \tau$ (151). On voit figure 76 pour $y=0$ cette courbe théorique figurée par des points cerclés. La courbe expérimentale *A* obtenue en considérant la demi-maille vient rapidement l'avosiner, puis en diverge quand les deux phénomènes sont devenus évidemment dissemblables, soit environ pour $\tau=0,1$. C'est à ce moment qu'elle tend vers la courbe *B* obtenue en considérant la maille entière et qui en était jusqu'alors très éloignée. On ne prendra donc en considération, pour évaluer les gradients dans ce cas, que les courbes obtenues pour $x=10/11$. La figure 77 montre ces résultats obtenus par la formule :

$$(158) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_1 \Delta x = \frac{\Delta \theta \Delta x}{\Delta x'} = 2 (\theta_1 - \theta_{10/11})$$

avec ici $\theta_1=1$, et raccordés à leur début à la courbe :

$$(159) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_1 \Delta x = \frac{1}{5,5 \sqrt{\pi \cdot 0,6612 \tau}}.$$

On a considéré comme inutilisables pour ce cas les résultats :

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_1 \Delta x = (1-\theta)_{x=9/11}.$$

On constate sur les courbes retenues que pour $y=10/11$, comme on est très près du coin de la section carrée, le raccordement avec la courbe théorique ne pourrait se faire que pour des temps inappréciables. On n'a donc pas représenté le début de cette courbe.

Le flux thermique à l'intérieur du corps peut aussi être déterminé en tenant compte de la direction du gradient. On peut approcher la surface à une distance d'une demi-maille, c'est-à-dire à $x=10/11$.

Le flux peut alors être représenté sans grosse erreur par :

$$(160) \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{10/11} \Delta x = 2 (\theta_{10/11} - \theta_{9/11}).$$

5.- RÉSULTATS POUR $m=0,1$.

a) COURBES D'ÉLEVATION DE TEMPÉRATURE.

Elles croissent un peu moins rapidement que les précédentes. En plus des courbes d'élévation en différents points du corps, pour les mêmes valeurs de x et de y , figurent les variations à la surface ($x=1$) (fig. 78 à 83).

b) CHAMPS DES ISOTHERMES.

Elles ont été tracées pour les temps $\tau=0,02$ et $0,1$. Les figures 84 et 85 sont les courbes intermédiaires et les figures 86 et 87 les champs d'isothermes correspondants.

La principale remarque à faire est la forme de ces isothermes près de la surface : elles coupent le côté de la section carrée et progressent moins rapidement vers le centre.

c) FLUX THERMIQUES ET GRADIENTS.

On est encore ici gêné par la petitesse de m et on peut hésiter entre deux déterminations du gradient à la surface. En effet on a d'un côté :

$$(148) \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_1 = \frac{h}{\lambda} (1-\theta_1)$$

qui est une formule rigoureuse, et de l'autre :

$$(158) \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_1 \Delta x = 2 (\theta_1 - \theta_{10/11})$$

formule que l'on a dû employer pour $m=0$, en rectifiant le début de la courbe.

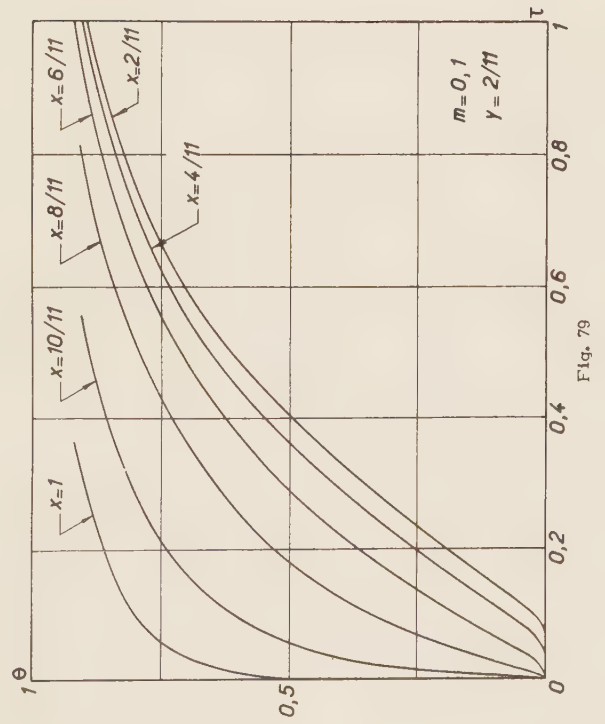
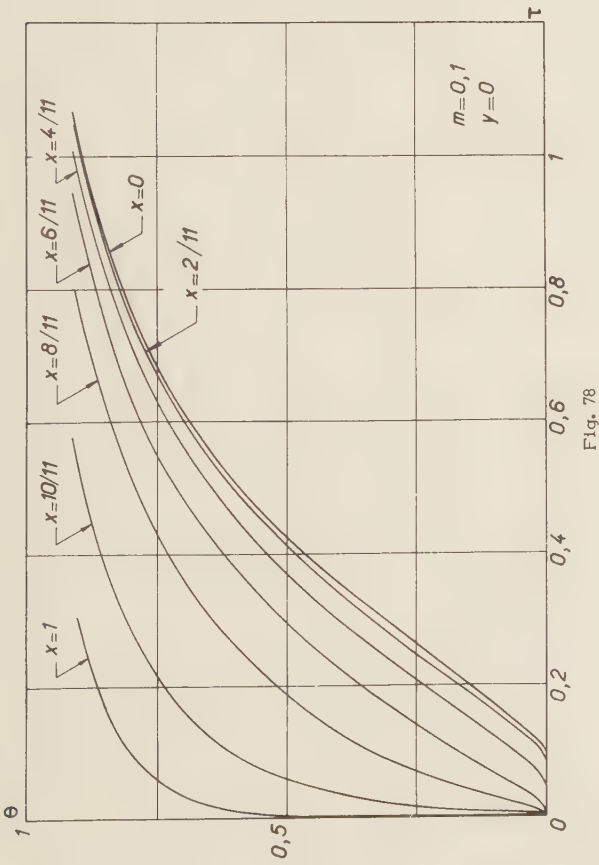
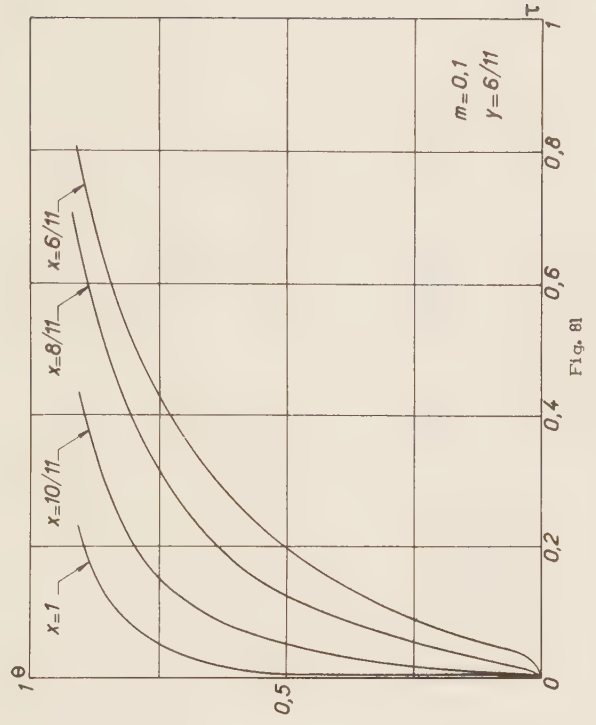
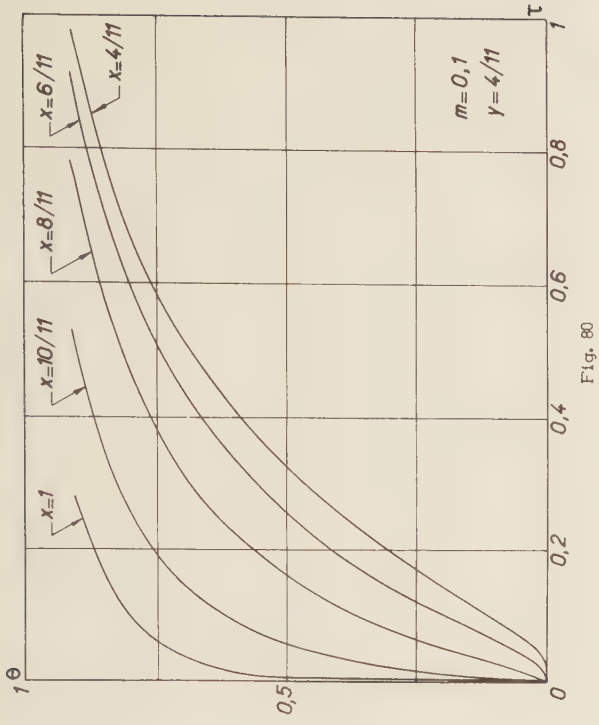
Or, le gradient initial est donné par :

$$(149) \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_1 = \frac{h}{\lambda} = \frac{1}{mL}, \quad \tau = 0.$$

C'est une valeur rigoureuse alors que l'utilisation de la formule (158) donne dans ce cas une valeur nulle rapidement suivie d'un maximum quand τ augmente. La figure 88 montre bien qu'il est préférable de prendre la formule (148). Ceci est vrai même si m est encore plus petit, puisqu'il n'y intervient qu'une seule courbe relevée θ dans la différence, au lieu de deux dans le cas de la formule (158). On a porté sur la même feuille pour $y=0$, la courbe obtenue par (158) (B) et celle obtenue par (148) (A) ainsi transformée :

$$(161) \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_1 \Delta x = \frac{\Delta x}{L} \left(\frac{1-\theta_1}{m}\right) = \frac{1}{m n} (1-\theta_1).$$

On trouvera, figure 89, les variations de ces gradients de surface correspondant aux diver-



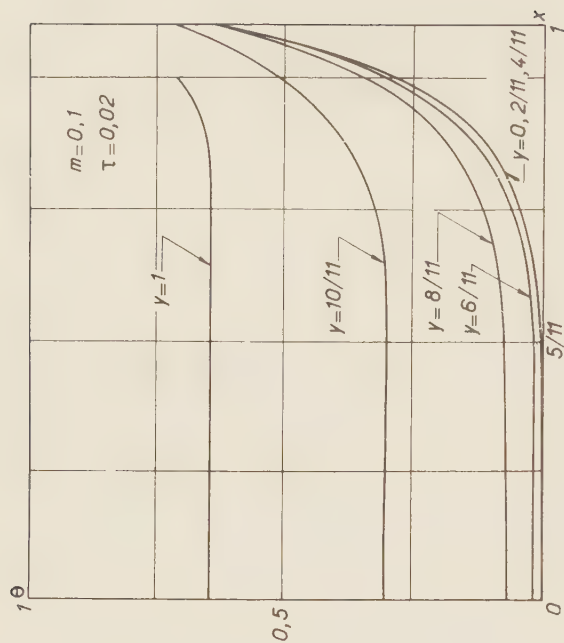


Fig. 84

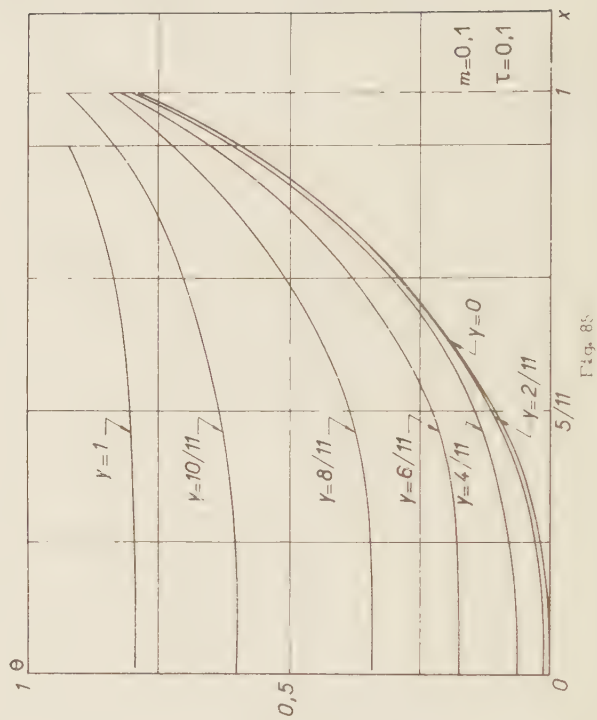


Fig. 85

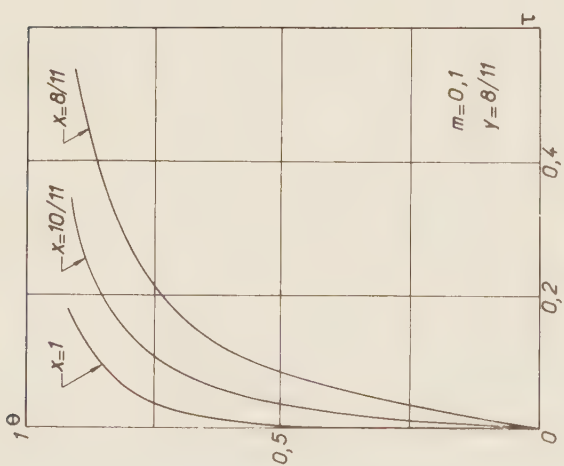


Fig. 82

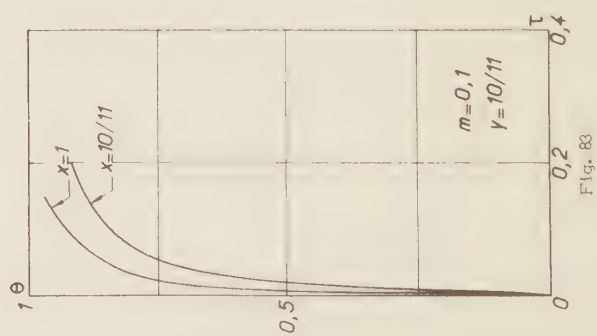


Fig. 83

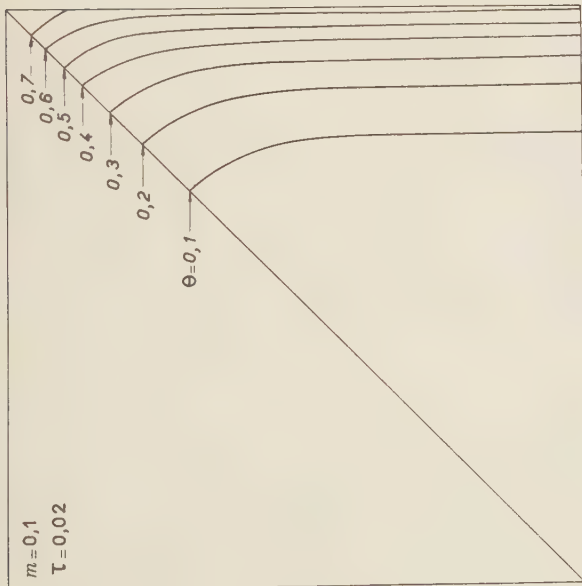


Fig. 86

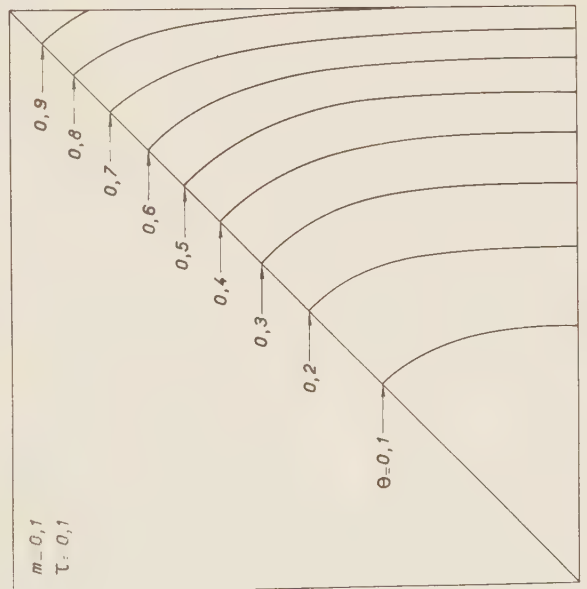


Fig. 87

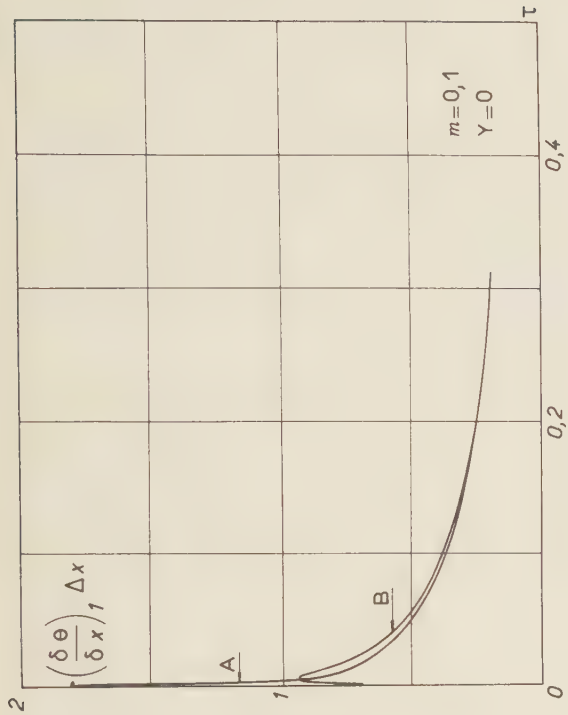


Fig. 88



Fig. 89

ses valeurs de y . Le gradient initial est donné par :

$$(162) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_1 \Delta x = \frac{1}{m n}, \quad \tau = 0.$$

Le flux près de la surface, soit pour $x = 10/11$, est encore donné par la formule (160).

6. - RÉSULTATS POUR $m=1$.

a) COURBES D'ÉLÉVATION DE TEMPÉRATURE.

Pour $m=1$, la barrette s'échauffe déjà d'une manière plus uniforme. L'Analyseur permettrait d'ailleurs pour de très grandes valeurs de m , de tracer des courbes très voisines en différents points du corps mais cela offrirait peu d'intérêt pratique. On a reporté sur deux feuilles (figures 90 et 91), les élévations aux trois points extrêmes du réseau :

$$y = 0, \quad x = 1 \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 10/11, \quad x = 1.$$

De plus, les courbes :

$$y = 0, \quad x = 10/11 \quad \text{et} \quad y = 10/11, \quad x = 10/11$$

donnent la valeur du flux aux deux points intéressants de la surface du corps.

b) CHAMPS DES ISOTHERMES.

On a relevé pour $\tau=0,1$ et $\tau=0,5$ les températures en tous les points du corps (fig. 92 et 93). Les champs obtenus montrent que, très rapidement, les isothermes se rapprochent de la forme circulaire (fig. 94 et 95).

c) FLUX THERMIQUES ET GRADIENTS.

La comparaison des figures 90 et 91 pour $x=0$ et $x=10/11$ fait voir que le flux est petit et varie très lentement. La formule (158) serait encore très imprécise et on emploie la formule (148) qui sert donc dans tous les cas où $m \neq 0$.

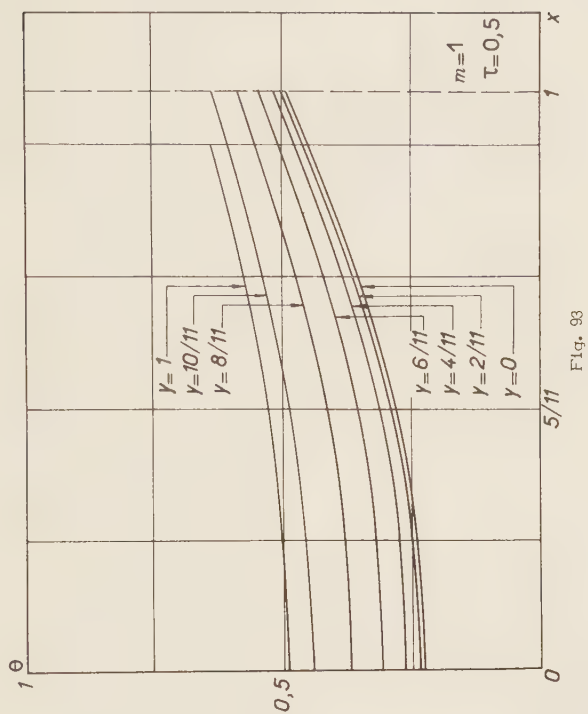
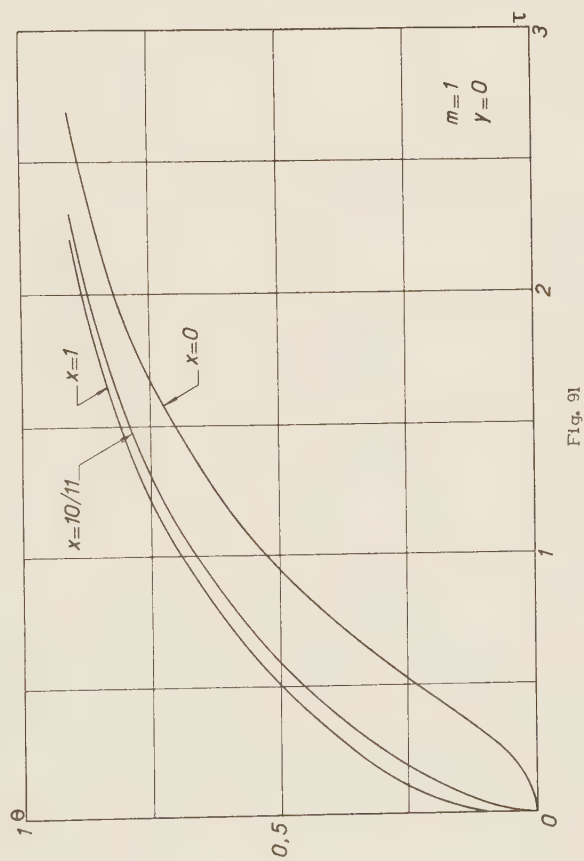
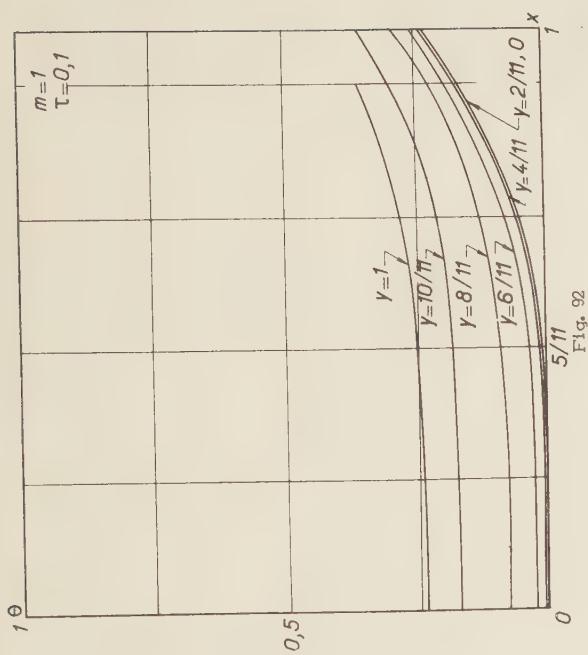
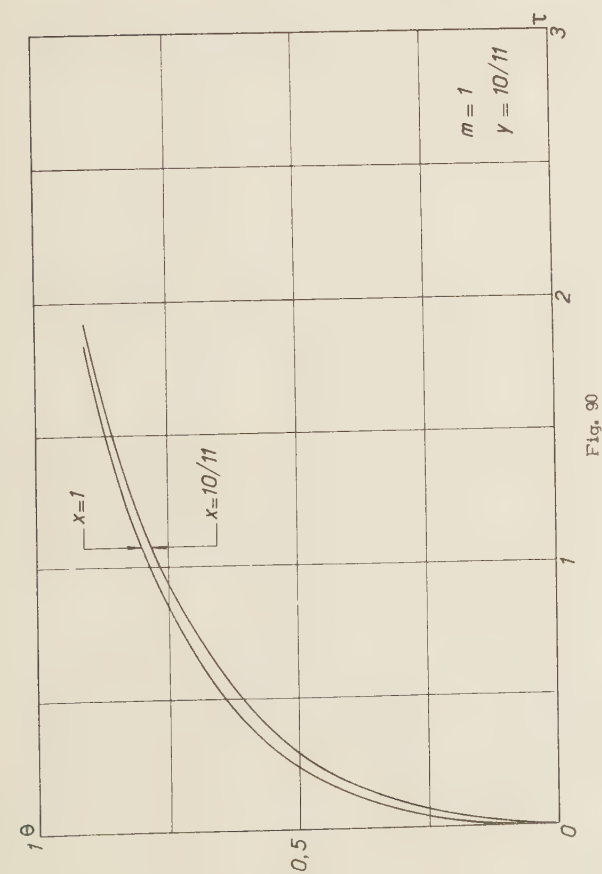
La figure 96 montre les variations du gradient à la surface pour $y=0$ et $y=10/11$.

7. - COMPARAISON DES FLUX THERMIQUES POUR LES DIFFÉRENTS m .

La courbe 97 montre pour $y=0$ et pour les trois valeurs de m les gradients reproduits à la même échelle en fonction de τ . L'intégrale de ces courbes représente la quantité de chaleur entrée dans l'élément $y=0$. On sait qu'au bout d'un temps infini, la quantité totale serait atteinte et égale à $c \rho (2L)^2$, soit électriquement, $C(2n)^2$, indépendamment de m et pour l'ensemble du corps. Si au point $y=0$, par exemple, l'élément ΔS était traversé finalement par la même quantité de chaleur quel que soit m (problème uni-dimensionnel), l'intégrale de toutes ces courbes serait égale. Pour $y=0$, le phénomène donne une idée de cette loi, les courbes se coupant mutuellement dans l'ordre correspondant.

8. - SYNTHÈSE DES RÉSULTATS SUR LE CHOC THERMIQUE.

Les courbes d'élévation de température obtenues par analogie, ainsi que les champs d'isothermes et les courbes de gradients qui s'en déduisent, donnent une vue d'ensemble précise du choc thermique en tous les points du corps et pendant toute l'évolution. Il s'est avéré cependant au cours des expérimentations elles-mêmes qu'un résultat important du choc thermique, l'affaiblissement de la résistance mécanique de l'éprouvette, pouvait être explicité par une courbe présentant des caractères particuliers et qu'il serait bon de trouver une base théorique justi-



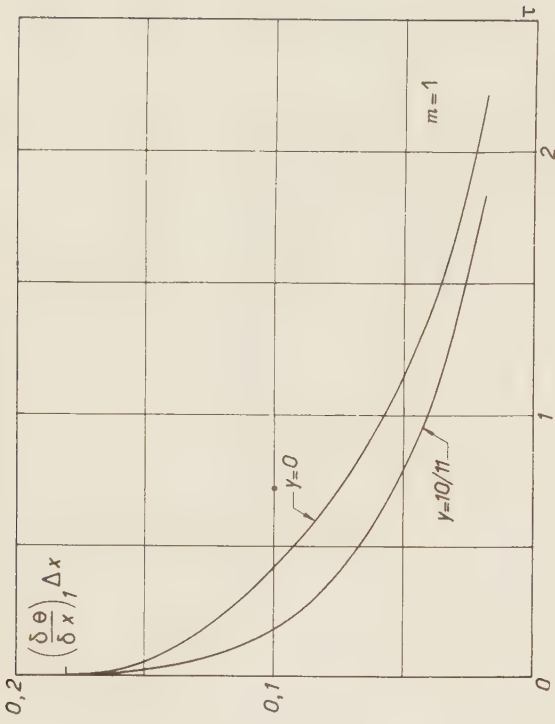


Fig. 96

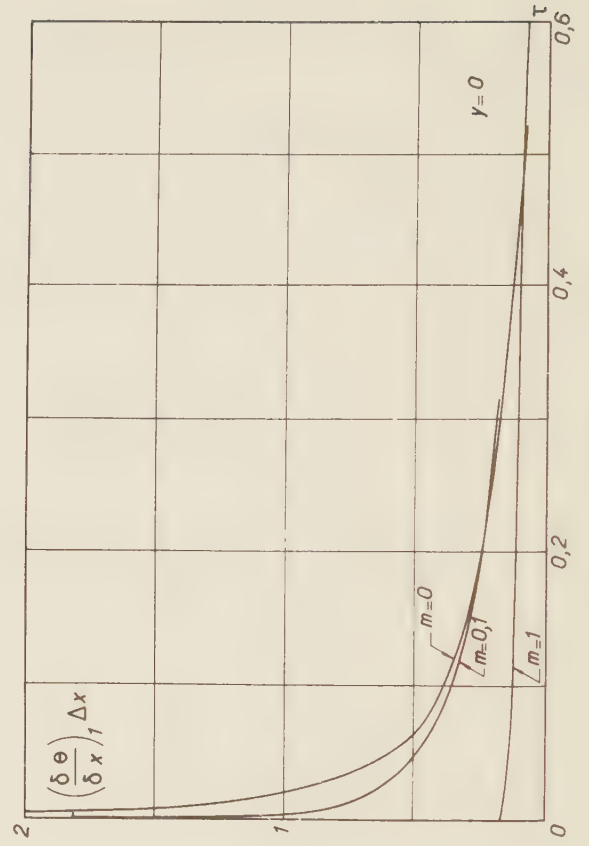


Fig. 97

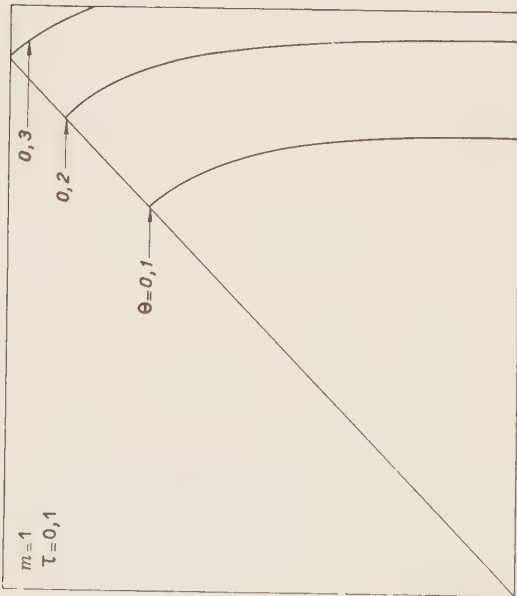


Fig. 94

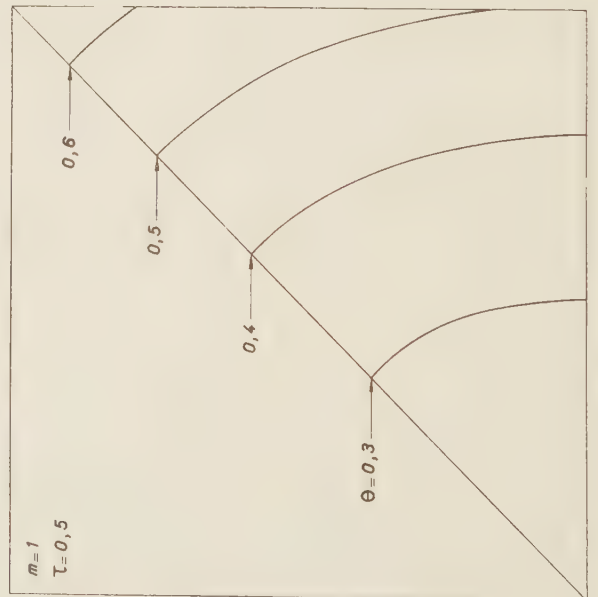


Fig. 95

fiant l'allure de cette courbe et, si possible, donnant une expression quantitative de certains phénomènes qu'elle exprime [62].

L'affaiblissement de la résistance mécanique est lié à l'idée de la pénétration dans le corps de contraintes provoquant des fêlures à partir d'une certaine valeur. Ces contraintes variant dans le même sens que le gradient thermique imposé en chaque point, on peut toujours faire correspondre à une contrainte maximum supportable par un corps de nature donnée, un gradient thermique maximum, G_m , qui ne devra pas être dépassé sous peine de fêlures au point donné.

Nous avons calculé à titre d'exemple quelques valeurs d'un gradient réduit arbitraire g_x :

$$(156) \quad g_x = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \Delta x, \text{ avec } \Delta x = \frac{L}{n} = \frac{L}{5,5}.$$

Des calculs analogues pourraient être faits pour g_y et, aux points où le flux thermique n'est pas constamment parallèle aux axes ox ou oy , c'est-à-dire en dehors des axes eux-mêmes et de la surface du corps pour $m=0$, on doit à chaque instant, pour avoir le gradient, effectuer l'opération :

$$(163) \quad g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}.$$

Le gradient thermique réel, G , suivant ox par exemple, est relié à g par :

$$(164) \quad G = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} (T_1 - T_0) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \Delta x \frac{(T_1 - T_0)}{\Delta x} = g \frac{\Delta T}{L/n}$$

ΔT étant le choc thermique, variable principale du phénomène, L le demi-côté du carré et $n = 5,5$.

Pour définir la résistance mécanique résiduelle après le choc thermique, il faut donc connaître les endroits du corps qui n'ont pas été atteints par les fêlures détruisant cette résistance. On est donc amené à tracer dans la section carrée la limite atteinte par le gradient réel maximum toléré, G_m , au cours de toute l'évolution. On obtient des points de ce lieu sur des lignes diverses coupant la surface résiduelle (axes, diagonales, axes parallèles à ox ou oy ...). Le phénomène bidimensionnel présente encore une symétrie d'ordre huit, ce qui facilite énormément le tracé.

Par exemple, sur l'axe ox (ou oy), on peut tracer, en variables réduites, la valeur de g en fonction du temps τ à tous les noeuds du réseau, pour $m=0$ (fig. 98).

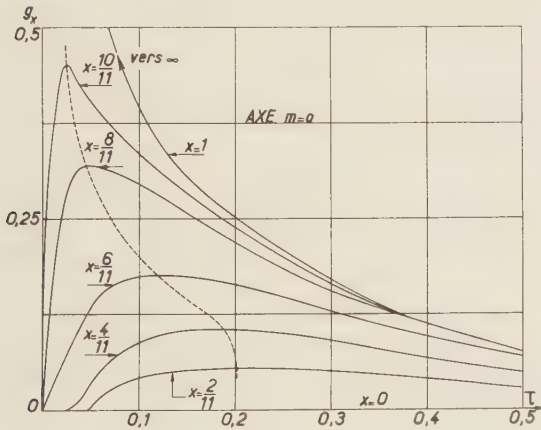


Fig. 98

On sait que dans ce cas $g_y = 0$.

Nous avons déjà donné les formules pratiques concernant certaines de ces courbes :

Pour $m=0$, à la surface ($\theta_1 = 1$) :

$$(158) \quad g_1 = 2 (\theta_1 - \theta_{10/11})$$

raccordée en son début à la courbe :

$$(159) \quad g_1 = 1/5,5 \sqrt{\pi \cdot 0,6612 \tau}.$$

Près de la surface,

$$(160) \quad g_{10/11} = 2 (\theta_{10/11} - \theta_{9/11}).$$

Pour les autres points à l'intérieur du corps, nous avons employé la formule :

$$(165) \quad g_{2p/11} = \frac{1}{2} (\theta_{2(p+1)/11} - \theta_{2(p-1)/11})$$

p variant de 1 à 4, qui correspond mieux à la dérivée des formes de courbes intéressées.

Par symétrie, les diagonales sont aussi des lignes de flux. On peut donc, dans ce cas, ne pas employer la formule (163) et utiliser d'une façon analogue à (165) :

$$(166) \quad g_{2p/11} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\theta_{2(p+1)/11} - \theta_{2(p-1)/11})$$

$2p/11$ désignant ici l'abscisse et l'ordonnée des noeuds. G_M étant donné par la nature du corps employé, on tire de (164), pour un choc thermique donné ΔT , le gradient réduit g_M dont on cherchera le lieu des points atteints au cours de toute l'évolution :

$$(167) \quad g_M = G_M \frac{L/n}{\Delta T}.$$

Dans l'exemple de l'axe ox , traçons sur la figure 98 une droite d'ordonnée g_M . Aucun des points du corps dont la courbe du gradient en fonction du temps restera en dessous de cette droite ne sera atteint par le gradient thermique critique et sera donc à l'intérieur de la surface de résistance mécanique non détruite par les fêlures. Sur un axe parallèle à ox (ou oy), on utiliserait la formule (163) et on aurait des courbes plus resserrées : gradients moins élevés pour $x=1$, plus élevée pour $x=0$.

Le lieu des maxima définit la courbe $g_M = f(x)$. Malheureusement x figure ici comme paramètre, dont on n'a qu'un nombre restreint de valeurs et la courbe des maxima est très imprécise. On la trace beaucoup plus facilement en tant qu'enveloppe de toutes les courbes $g = f(x)$ pour différents temps τ . Cette nouvelle famille est donnée figure 99, toujours sur l'axe et pour $m=0$.

Au début du choc thermique, pour $\tau=0$, $g=f(x)$ est représenté par les deux axes, x et g . La courbe des gradients se déforme quand τ croît, s'abaissant au voisinage de la surface du corps ($x=1$) et s'élevant vers l'intérieur. Les courbes se coupent ainsi continûment l'une après l'autre en engendrant une enveloppe E qui est la courbe cherchée : $g_M = f(x)$. Elles varient donc avec le temps, au début du phénomène, comme dans le cas du mur infini.

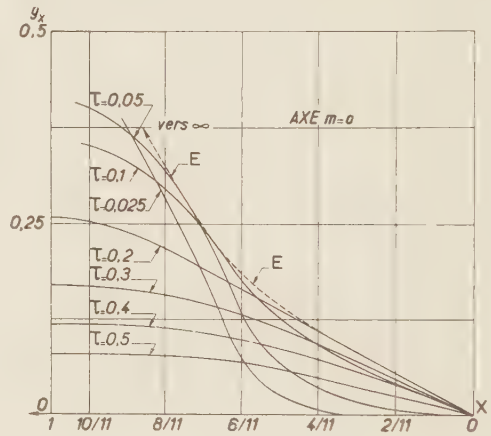


Fig. 99

A partir d'un temps τ_c , situé entre 0,1 et 0,2, pour lequel le flux a nettement atteint le centre du corps, les courbes $g=f(x)$ diffèrent de celles du mur infini et ne se coupent plus. La distribution des gradients dans le corps conserve une même allure aux différents temps, selon des courbes qui descendent en chaque point suivant des lois similaires en fonction du temps. Pratiquement, il ne reste donc plus que le mode de la plus grande constante de temps. On observe alors que l'intérieur du corps est soumis à un gradient presque linéaire, donc à une distribution de température d'allure parabolique. On peut encore dire que le choc thermique est terminé à τ_c .

Sur un axe parallèle à ox (ou oy), et en utilisant alors la formule (163), on obtiendrait, comme précédemment, des courbes plus resserrées ; en particulier l'enveloppe aboutirait à une valeur non nulle pour $x=0$.

A l'aide d'un certain nombre de points ainsi obtenus, on peut donc tracer, pour un choc thermique donné, la courbe des points atteints au maximum par le gradient g_M au cours de toute l'évolution thermique et que nous appelons isogradients maxima (fig. 100). Cette courbe délimite une surface non atteinte par les fêlures et représentant pratiquement le seul endroit du corps offrant encore de la résistance mécanique à la rupture, avec une limite σ . On peut donc chercher à rapprocher les courbes expérimentales de résistance résiduelle :

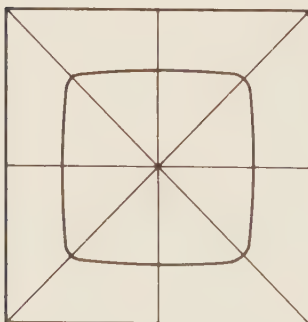


Fig. 100

σ/σ_0 des courbes théoriques de surface résiduelle : S/S_0 .

Le but étant surtout de trouver une base théorique permettant de comprendre exactement le fonctionnement du choc thermique, nous avons estimé possible, étant donné la grande masse de

calculs graphiques qu'imposerait le tracé exact de tous les isogradients maxima permettant d'obtenir finalement $S/S_0 = f(\Delta T)$, et ceci pour les différents m , de supposer que l'isogradient maximum se déforme, quand ΔT augmente, d'une manière homothétique. En réalité, la courbe s'arrondit peu à peu en se rétrécissant après être partie d'une forme carrée, mais c'est

surtout le début du phénomène qui est intéressant et justement l'approximation faite y est justifiée ; par ailleurs, il faut tenir compte du peu de précision des constantes thermiques et des petits phénomènes secondaires intervenant dans les expérimentations.

Partant de $g_M = f(x)$ sur l'axe (courbe E) nous avons tracé $x = f_1(1/g_M)$ (en pointillé sur la figure 101). x variant de 1 à 0 définit une dimension de la surface restante. Avec notre approximation :

$$(168) \quad \frac{S}{S_0} = x^2.$$

Nous avons donc tracé :

$$(169) \quad x^2 = f_2(1/g_M) = f_2\left(\frac{\Delta T}{G_M L/n}\right).$$

Nous avons repris le problème pour $m=0,1$, sur l'axe (figures 102 et 103). A la surface, on emploie alors la formule :

$$(161) \quad g_1 = \frac{1}{m n} (1 - \theta_1)$$

avec un gradient initial :

$$(162) \quad g_1 = \frac{1}{m n} = \frac{h L}{\lambda n}, \quad \tau = 0.$$

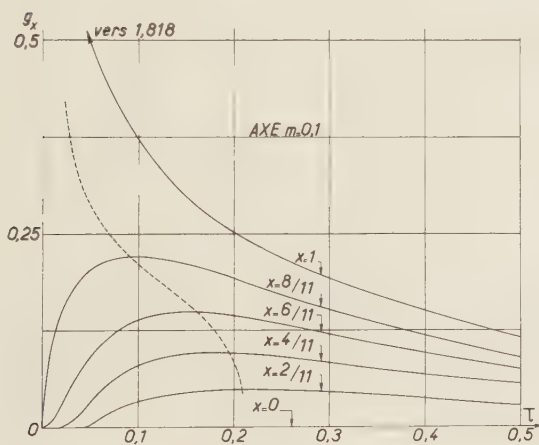


Fig. 102

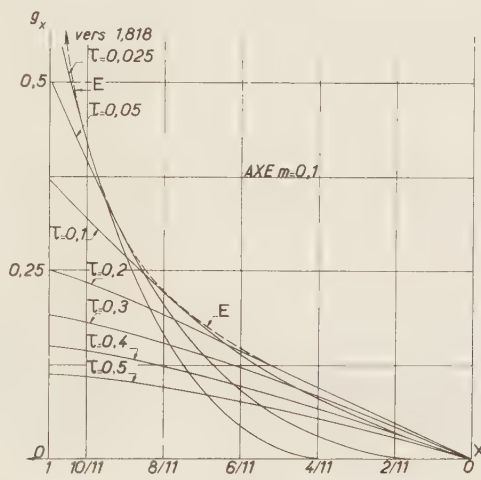


Fig. 103

L'échauffement du corps étant plus lent et plus isothermique, les gradients sont moins élevés et les isogradients maxima plus circulaires.

La figure 101 donne également les courbes x et x^2 pour $m=0,1$. Une particularité de ces courbes est très importante : elles débutent par un net palier à $x=1$, ce qui prouve que le corps n'est pas atteint par le gradient critique tant qu'il n'a pas subi un certain ΔT_M . Ce phénomène est dû à la résistivité superficielle, qui s'oppose à un gradient infini à la surface au début de l'évolution thermique.

Nous pouvons donner la valeur de ce palier et du ΔT_M correspondant. Le gradient réduit maximum apparaissant dans le corps pour une variation unitaire de température est donné par

la formule (162). Sur les courbes 101, le palier a pour valeur :

$$(170) \quad 1/g_1 = mn.$$

En reportant dans (167), on arrive à :

$$(171) \quad \frac{1}{mn} = \frac{hL}{\lambda n} = G_M \frac{L/n}{\Delta T_M}$$

soit

$$(172) \quad \Delta T_M = G_M \lambda / h.$$

Le choc thermique admissible pour ne pas avoir de fêlures est proportionnel au gradient réel admissible, à la conductibilité interne et à la résistivité superficielle.

L'expérience confirme cette loi.

On peut constater que la formule (172) ne fait pas intervenir les dimensions de l'éprouvette, ni le facteur $c\rho$, qui influent seulement sur l'échelle des temps thermiques.

En ce qui concerne la forme générale des courbes obtenues à partir de diverses éprouvettes, elles suivent effectivement les lois de variations représentées figure 104, sur laquelle nous avons porté les principaux paramètres.

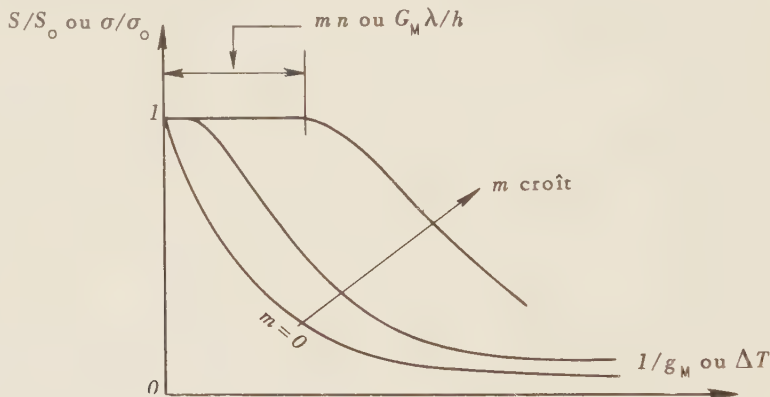


Fig. 104

Remarque 1.- Il peut sembler superflu, étant donné que l'on connaît mal les constantes thermiques, d'obtenir avec la grande précision inhérente à l'analyseur les courbes d'élévation de température en fonction du temps, par exemple. Cependant le tracé exact des isothermes dans le corps étant déduit de coupes dans des familles de courbes intermédiaires, elles-mêmes déduites de coupes dans les familles des courbes d'élévation de température données directement par l'analyseur, on conçoit que si ces dernières ne sont pas connues avec le maximum de précision, on aura, à la fin des calculs graphiques, des isothermes complètement déformées.

Même remarque pour l'obtention des gradients en fonction du temps, donnant eux-mêmes des courbes enveloppes, qui fournissent finalement les isogradients maxima cherchés. D'où l'intérêt général de la grande précision de l'analyseur de régimes transitoires.

Remarque 2.- Certaines règles de construction, qui ont été indiquées à l'occasion de cet exemple de réseau RC sont applicables à des réseaux très différents, par exemple aux réseaux LC pour l'étude des écoulements aérodynamiques supersoniques [63].

VI - APPLICATION A L'ÉTUDE DE L'ÉLASTICITÉ VISQUEUSE DANS LES HAUTS POLYMÈRES

1. - POSE DU PROBLÈME.

On peut représenter par diverses analogies, mécaniques ou électriques, le comportement de certains matériaux présentant de l'élasticité visqueuse. Ces analogies ont été envisagées, à partir de courbes expérimentales de traction obtenues à l'O.N.E.R.A., par M. PERSOZ, suivant deux processus différents :

- a) Les éprouvettes, découpées avec précision dans une feuille du matériau étudié, sont soumises pendant un certain temps à une traction leur imposant une contrainte constante (utilisation de plongeurs d'Andrade). Les lectures d'allongement en fonction du temps sont faites par visées micrométriques et les plus grandes précautions sont prises pour assurer à l'atmosphère ambiante une température et une hygrométrie constantes. Lors de l'application de la charge, on observe un allongement instantané correspondant à une élasticité instantanée. Puis l'éprouvette continue à s'allonger jusqu'à ce qu'on la coupe au bout du temps voulu. Elle se rétracte alors instantanément d'une quantité correspondant à l'élasticité instantanée (qui est de ce fait un phénomène typiquement réversible). Elle continue ensuite à se rétracter librement dans le temps (élasticité visqueuse), mais conserve toujours une déformation résiduelle due à la viscosité pure (phénomène typiquement irréversible).

Cette expérimentation constitue l'étude du fluage ou déformation à contrainte constante.

- b) Les éprouvettes peuvent être soumises, au contraire, à une déformation constante imposée pendant un certain temps. C'est alors la contrainte qui va varier et quand on coupera l'éprouvette elle se rétractera, comme pour le fluage, en présentant toujours une déformation résiduelle due à la viscosité pure.

C'est là l'étude de la relaxation, ou contrainte variable à déformation constante.

On est conduit, par l'aspect des courbes obtenues, à chercher à les analyser par certaines expressions simples. Par exemple le retour de l'éprouvette après contrainte et déformation peut s'exprimer par :

$$(173) \quad \frac{l - l_0}{l_0} = A_1 e^{-\frac{t}{K_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{K_2}} + \dots + B.$$

Le nombre de termes exponentiels dépend de l'approximation à laquelle on veut arriver, limitée naturellement par la zone d'incertitude des mesures et B est la déformation résiduelle relative à la longueur initiale l_0 .

Sans qu'il soit besoin d'explicitier les correspondances entre diverses constantes, on peut dès lors se représenter les formes que peuvent prendre les analogies mécaniques que divers auteurs ont préconisées pour remplacer par des éléments localisés les constantes réparties existant à l'intérieur des éprouvettes étudiées. C'est ainsi que, l'inertie des masses en mouvement pouvant être totalement négligée, on peut ramener en première approximation à deux représentations canoniques des ensembles plus ou moins complexes de ressorts et d'amortisseurs (dash-pots) figurant la localisation des constantes réparties de l'éprouvette et obéissant au principe de superposition de BOLTZMANN. Si l'on s'en tient à l'analogie formelle des équations,

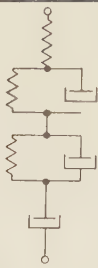
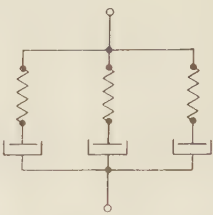
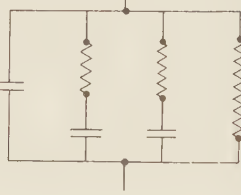
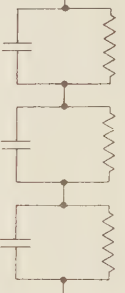
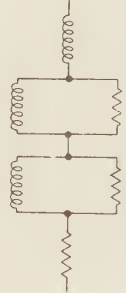
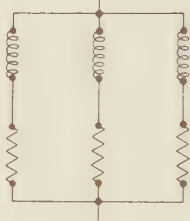
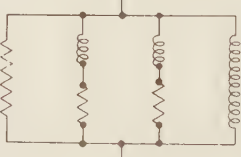
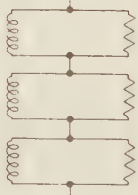
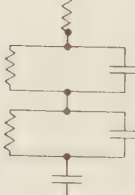
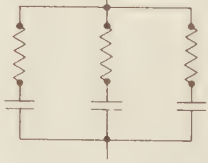
Analogie	Contrainte σ	Déformation ε	Ressort $\sigma = E \varepsilon$	Amortisseur $\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$	 ①	 ②
A	v	$q = \int i dt$	condensateur $C = \frac{1}{E}$	résistance $R = \eta$		
B	i	$\int v dt$	self $L = \frac{1}{E}$	résistance $R = \frac{1}{\eta}$		
C	v	i	résistance $R = E$	self $L = \eta$		
D	i	v	résistance $R = \frac{1}{E}$	condensateur $C = \eta$		

Fig. 107

on peut trouver les formes équivalentes d'analogie mécanique employant des masses et des amortisseurs, mais il suffit pour ce qui va suivre de retenir la forme des deux premières représentations (figures 105 et 106). Les différents termes exponentiels apparaissent clairement sur la figure 105, qui offre la particularité de représenter explicitement l'élasticité instantanée (ressort du haut) et la viscosité pure (amortisseur du bas). Dans la figure 106, ces deux éléments sont répartis dans les différents circuits en parallèle.

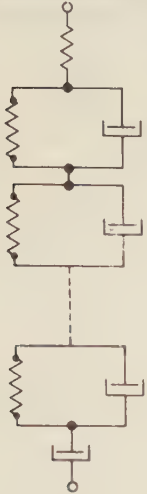


Fig. 105

En fait, on constate certains écarts entre les résultats que peuvent donner ces représentations et les courbes obtenues expérimentalement, ce qui incite à insérer dans l'analogie un ou plusieurs éléments non linéaires. Indépendamment de ce fait, nous avons essayé de voir si l'analogie elle-même était réalisable, en la transposant du domaine mécanique dans le domaine électrique,

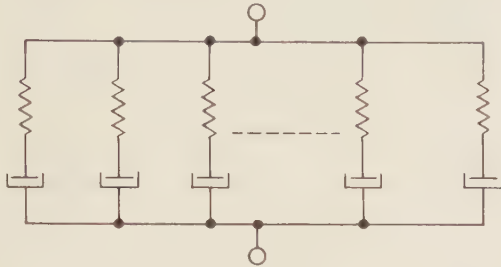


Fig. 106

car il n'est pas besoin de préciser qu'une analogie mécanique serait non seulement longue et coûteuse mais infiniment moins souple que l'analogie électrique correspondante, qui permet de régler au cours d'un essai, répété ici plusieurs fois par seconde à l'aide de notre analyseur, tous les paramètres en jeu pour arriver au résultat cherché. Les correspondances générales entre analogies électrique et mécanique sont choses classiques.

M. PERSOZ a dressé le tableau des correspondances utilisables dans notre cas. La figure 107 montre quatre types d'analogies électriques correspondant aux deux représentations I et II des figures 105 et 106. Les deux premières A et B font appel à des considérations énergétiques sur la puissance dissipée dans une résistance ou un amortisseur, les deux dernières C et D ne sont que des analogies formelles entre les équations de part et d'autre.

2.- CHOIX D'UNE ANALOGIE EN LIAISON AVEC L'ANALYSEUR DE RÉGIMES TRANSITOIRES. - MONTAGES ENVISAGÉS.

Compte tenu de la nécessité d'avoir des éléments localisés facilement variables et suffisamment précis, il convient d'éliminer du montage les selfs-inductions, donc les analogies B et C, ce qui ne limite d'ailleurs en rien les possibilités de représentation. D'autre part, comme l'analyseur donne plus facilement des tensions que des intensités constantes, l'analogie A sera plus spécialement employée pour le fluage (contrainte constante) et l'analogie D pour la relaxation (déformation constante). L'ordre de grandeur des temps expérimentaux, qui se chiffrent en heures, peut s'étendre à des semaines et même des mois. Les constantes de temps données par l'analyseur seront donc à multiplier par le rapport temps réel sur temps analogique. Ce sont les plus grandes que l'on trouvera le plus facilement : K_1 , K_2 , etc. à la manière d'un développement en série convergente, jusqu'à la limite de précision expérimentale en comparant les courbes données par l'analyseur aux courbes d'allongement relevées sur les éprouvettes.

a) ÉTUDE DU FLUAGE (Analogie A).

Il s'agit d'imposer au circuit analogue une tension (contrainte) constante, puis nulle, et de relever la charge (déformation) correspondante.

De toutes façons, les circuits du type I (correspondant à la figure 105) sont plus intéressants parce qu'ils explicitent l'élasticité instantanée et la viscosité pure, paramètres qui peuvent le

plus facilement être mis en valeur dans les courbes expérimentales. Dans le cas du fluage, le circuit I est en plus le mieux adapté à l'analyseur en ce qui concerne le relevé de la charge totale demandée. La forme idéale des courbes d'allongement à contrainte constante recueillies sur les éprouvettes est reproduite sur la figure 108. On y distingue l'allongement instantané A.I. et les asymptotes, oblique et horizontale dues à la viscosité pure. La déformation résiduelle D.R. est égale au produit de la pente de l'asymptote oblique par le temps de contrainte T , qui permet de déterminer l'asymptote oblique plus facilement, donc la viscosité pure. Le principe de BOLTZMANN se traduit sur cette figure par l'égalité des deux lignes pointillées, situées aux temps t_1 et $T+t_1$. Un ensemble, ne comprenant que de l'élasticité instantanée et de la viscosité pure, réagirait comme le montre la courbe inférieure de la figure 108 ; on imagine facilement les autres cas avec ou sans les divers paramètres.

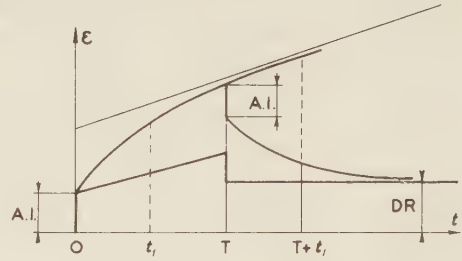


Fig. 108

De toutes façons et quelle que soit la forme de représentation choisie, nous avons pensé qu'il était utile de tracer toutes les courbes expérimentales en les remenant à la même contrainte unité : pour des éprouvettes absolument identiques et homogènes et étudiées dans les mêmes conditions, on observe alors en principe, si les déformations sont proportionnelles aux charges, une famille de courbes ayant pour paramètre le temps de contrainte T et dont la partie montante est commune (fig. 109). En supprimant l'élasticité instantanée et la viscosité pure, on obtient le réseau de la figure 110, l'asymptote correspondant à la hauteur H de la figure 109.

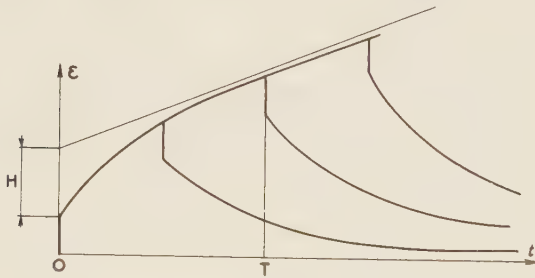


Fig. 109

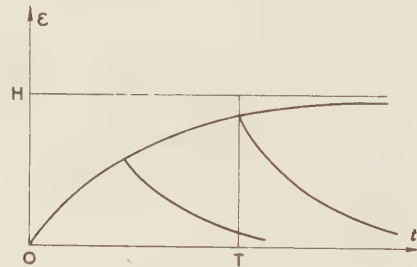


Fig. 110

Considérons le circuit de la figure 111. Il représente dans l'analogie A respectivement :

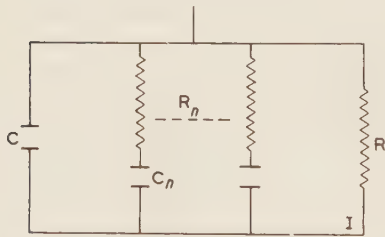


Fig. 111

la viscosité pure (R), l'élasticité instantanée (C) et l'élasticité visqueuse ($\Sigma R_n \cdot C_n$). La contrainte constante appliquée pendant le temps T sera figurée par une tension constante U aux bornes du circuit et la déformation sera proportionnelle à la charge totale délivrée au circuit et égale à la somme des charges de chacune des branches :

$$(174) \quad q = \Sigma v_n C_n + UC + It.$$

Sur la figure 112 (p. 83), la capacité Γ est supposée assez grande pour que la tension v' reste petite devant la tension de travail $U=RI$. Les résistances ρ sont assez grandes aussi pour ne prélever qu'un courant i_n négligeable devant I_n .

Le potentiel V répond à l'équation :

$$(175) \quad \Sigma i_n = 0 = \Sigma \left(\frac{v_n - V}{\rho_n} \right) + \frac{U - V}{\rho} + \frac{v' - V}{\rho'}$$

d'où :

$$(189) \quad V_1 \infty \rightarrow U ;$$

d'un autre côté,

$$(190) \quad q_0 = V_0 (\sum C_n + C)$$

d'où :

$$(191) \quad \frac{q_1}{q_0} = \frac{V_1}{V_0}$$

les deux courbes ont la même échelle.

V_1 et V_0 ont donc la même tension à l'origine (charge de l'élasticité instantanée) et :

$$(192) \quad q_0 = q_1 + \frac{U}{R} t$$

$$(193) \quad V_0 = V_1 + \frac{Ut}{R(\sum C_n + C)}$$

L'asymptote oblique part donc de U à l'origine des temps et la différence entre V_0 et V_1 correspond à la viscosité pure. Le tracé de l'asymptote oblique détermine donc la contrainte (U) et la viscosité pure (R) de même que l'ordonnée à l'origine détermine l'élasticité instantanée (C). Pour reproduire la courbe expérimentale par analogie, on a besoin de connaître U , pour une question d'échelle.

Pour ne rien lui retrancher on peut alors introduire C et $R\Gamma$ dans le circuit à condition que $v' \ll U$.

Dans ces conditions :

$$(194) \quad v' = \frac{It}{\Gamma} = \frac{Ut}{R\Gamma} \leq \beta U$$

d'où pour $t = T$

$$(195) \quad R\Gamma \gg T$$

$$(196) \quad \Gamma \gg T/\beta R$$

β peut atteindre quelques pour cent.

On peut aussi, et alors sans aucune approximation, chercher à reproduire la courbe V_1 facultativement sans charge instantanée. D'après (187) :

$$(197) \quad V_1 = \frac{\sum v_n C_n + UC}{\sum C_n + C}$$

avec

$$(189) \quad V_1 \infty \rightarrow U.$$

On procède alors comme suit pour utiliser l'analyseur :

- 1°) La courbe V_1 est ramenée à une échelle pour laquelle $U=1$, ce qui donne une correspondance directe entre les tensions et les lectures de l'analyseur.
- 2°) Le temps T est ramené à une fraction ($1/4$ par exemple) du temps de base de l'analyseur et on utilise le dispositif déjà décrit qui permet d'observer une partie de la décharge : on observe, dans l'exemple, le retour du circuit à ses conditions initiales pendant les $3/4$ du temps de base (retour de l'éprouvette).
- 3°) Les points expérimentaux déterminés de cette manière d'après la courbe d'allongement obtenue sont affichés sur les deux potentiomètres P_v et P_h de l'analyseur : un point se forme sur l'écran que nous marquons sur le verre même du tube (avec une plume fine, par exemple). On trace ainsi en pointillé la courbe que l'on doit analyser.
- 4°) On met en marche le contacteur et on règle tous les éléments pour faire coïncider le plus exactement possible la courbe analogique avec les points expérimentaux marqués.
- 5°) On lit les valeurs R_n et C_n .

Cette expérience est très curieuse : l'influence instantanée de la variation de chaque

élément, R ou C , modifie la courbe obtenue de façon frappante. Les éléments R_1, C_1 de la plus grande constante de temps agissent surtout sur la fin de la courbe. Les circuits suivants agissent d'autant plus sur le début de la courbe que leur constante de temps est plus faible.

L'ordre de grandeur de l'impédance du circuit étant à fixer, il y a un degré de liberté pour p éléments. En ce qui concerne l'ensemble des circuits R_n, C_n , on peut donc fixer un élément ; pour des raisons de commodité, nous avons choisi C_1 , la plus grande capacité.

La relation $\rho_n C_n = \alpha$ est obtenue automatiquement en jumelant sur le même axe deux commutateurs par décade : l'un fournit le C_n désiré et l'autre la conductance $1/\rho_n$ calculée pour une certaine valeur de α .

b) ÉTUDE DE LA RELAXATION (Analogie D).

On impose ici une tension (déformation) constante, puis on cesse de l'imposer et on laisse le circuit revenir seul à son état de repos en observant la baisse de tension correspondante (retour vers la longueur initiale). Le problème est donc analogiquement plus simple que le précédent : on impose et on lit une tension et le circuit utilisé est tout simplement l'un de ceux indiqué sur la figure 107 pour l'analogie D. Le dispositif analogue impose donc U pendant le temps T à l'entrée du circuit puis le laisse se décharger : il suffit d'observer le retour du potentiel correspondant pendant le reste de la période. On observe encore (fig. 114) l'allongement instantané et la déformation résiduelle. Le processus analogue reste identique pour les mesures.

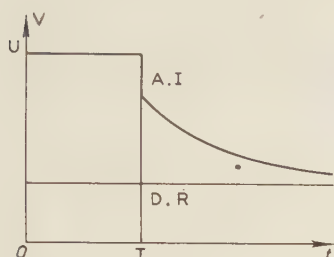


Fig. 114

3. - EXPÉRIMENTATION.

Les essais que nous exposons ont dû conserver jusqu'à présent un caractère de première investigation, pour les raisons que voici :

- a) On a relevé certains écarts accidentels provenant d'une notable différence de comportement entre des éprouvettes supposées identiques. Les raisons trouvées sont d'ordre purement chimique. De même, on a pu craindre que l'apparition d'un comportement non linéaire dans les résultats expérimentaux vienne tout simplement d'une variation dans le temps d'éléments sujets à l'oxydation.

- b) Ces écarts accidentels observés sont encore augmentés si on retranche des courbes expérimentales l'élasticité instantanée et la viscosité pure, de sorte que si l'on ramène un certain nombre de courbes à la contrainte unité, il devient très difficile d'en dégager une courbe moyenne : c'est avant cette soustraction qu'il faudrait établir la courbe moyenne correspondant à un type de matériaux donné et à un temps donné, puis retrancher une moyenne des deux paramètres en question.

Cependant, un essai préliminaire portant surtout sur l'utilisation de l'analyseur a été fait à partir d'une des courbes de fluage relevées pour le matériau donné.

Bien que ne comportant que deux branches, c'est-à-dire trois éléments réglables, il a permis de vérifier que l'on pouvait attendre beaucoup de cette méthode d'analogies électriques puisque dans ces conditions rudimentaires on a pu faire coïncider les deux courbes avec quelques pour cent d'écart seulement en deux ou trois points.

Les résultats peuvent être donnés à titre documentaire :

$$\begin{aligned} R_1 &= 20\,000\ \omega & R_2 &= 2\,500\ \omega \\ C_1 &= 1\ \mu\text{F} & C_2 &= 0,4\ \mu\text{F} \\ \rho_1 C_1 &= \rho_2 C_2 = 1'' \end{aligned}$$

Etant donné les temps en présence, on a alors pu attribuer à l'éprouvette étudiée les deux constantes de temps suivantes :

334 heures et 167 heures.

4. - CONCLUSION DES ESSAIS.

La rapidité avec laquelle on analyse dans ces conditions une courbe expérimentale est encourageante : il convient en conséquence de porter par la suite son attention sur les différents points suivants :

- a) Refaire des expériences définitives avec un nouveau matériau au moyen d'un appareillage adapté à l'étude de son fluage.
 - b) Dégager des courbes expérimentales moyennes puis leur retirer, le cas échéant, les quantités moyennes correspondant aux deux paramètres d'élasticité et viscosité pures.
 - c) Utiliser l'analyseur au maximum de précision, c'est-à-dire avec quatre circuits ou plus pour faire coïncider les courbes de façon parfaite et en agrandissant au maximum le début des courbes. Ceci pour y "loger" le plus grand nombre possible de constantes de temps en profitant ainsi au mieux des nombreuses mesures d'allongement qui sont faites pendant les débuts des essais de fluage.
 - d) Effectuer, si un phénomène non linéaire réellement précis se superpose à une courbe restituée par des éléments *RC*, des corrections par un ou plusieurs éléments non linéaires pouvant être introduits sans altérer sensiblement la précision.
- 

CONCLUSION

Nous avons montré qu'il était possible de réaliser un analyseur de régimes transitoires différent des machines analogiques habituelles et basé sur plusieurs principes fondamentaux :

- réseaux formés d'éléments de faible valeur, permettant de diminuer les poids, encombrements, prix et temps de mesure correspondants ;
- variation instantanée de la grandeur d'entrée étudiée, sans nuire à la généralité des essais ;
- relevé des courbes et mesures en variables réduites par référence à une tension donnée, au moyen d'une méthode de double zéro supprimant les erreurs et distorsions habituelles.

Nous avons décrit en détail le fonctionnement et la réalisation de cet analyseur, puis celle des réseaux à résistances et capacités destinés à l'étude des phénomènes thermiques transitoires.

Nous avons donné les résultats des essais entrepris pour vérifier le bon fonctionnement et la précision de l'analyseur et des réseaux.

Nous avons enfin donné à titre d'exemples deux applications, l'une concernant l'étude de chocs thermiques, l'autre l'étude de certains cas d'élasticité visqueuse.

D'autres expérimentations sont à l'étude, concernant des phénomènes variés : l'analyseur de régimes transitoires est appelé à avoir les applications les plus diverses en s'adaptant facilement aux problèmes correspondants.



TABLEAU I

R_n	$\frac{\rho_n/\rho_{n-1}}{=n/n-1}$	πR_v	πR_D	$\frac{R_D - R_v}{R_v} \%$	πR_A	$\frac{R_A - R_v}{R_v} \%$	πR_B
R_1	∞	∞	1	$-\infty$	1,17170	$-\infty$	0,78675
R_2	2/1	0,3465	0,3333	-3,6	0,34460	-0,55	0,31894
R_3	3/2	0,2027	0,2000	-1,35	0,2025	-0,1	0,19557
R_4	4/3	0,1439	0,14285	-0,7	0,14381	-0,07	0,14057
R_5	5/4	0,11158	0,11111	-0,4	0,11155	-0,03	0,10962
R_6	6/5	0,09117	0,090909	-0,27	0,091149	-0,023	0,08979
R_7	7/6	0,07708	0,07692	-0,2	0,077065	-0,02	0,07605

TABLEAU III

$\frac{t}{RC}$	V théorie	V analogie
0,05	0,050	0,048
0,1	0,095	0,094
0,2	0,182	0,180
0,3	0,260	0,256
0,4	0,330	0,328
0,5	0,394	0,395
0,6	0,451	0,452
0,7	0,503	0,505
0,8	0,551	0,552
0,9	0,594	0,596
1	0,632	0,633
1,2	0,699	0,697
1,5	0,777	0,775

TABLEAU II

sec- tion	$\frac{C_v - C_D}{C_D} \%$	$\frac{C'_v - C'_D}{C'_D} \%$
1	8,3	3,7
2	2	1,3
3	1	0,7
4	0,5	0,4
5	0,3	0,25

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - P. VERNOTTE.- *Thermocinétique*. (S.D.I.T.).
- [2] - N.R. EYRES, D.R. HARTREE, J. INGHAM, R. JACKSON, R.J. SARJANT, J.B. WAGSTAFF.- *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Vol. 240/1946.
- [3] - R. JACKSON, R.J. SARJANT, J.B. WAGSTAFF, N.R. EYRES, D.R. HARTREE, J. INGHAM.- *Journal of Iron and Steel Institute* n° 2, Vol. 150/1944.
- [4] - L. MALAVARD.- *La technique du Laboratoire de Physique*. C.N.R.S. 1950.
- [5] - L. MALAVARD et J. MIROUX.- *IV^{ème} Congrès International du chauffage industriel*, n° 82, 10/1952.
- [6] - L. MALAVARD.- *Colloque du C.N.R.S.* 1951.
- [7] - J. MIROUX.- *La Recherche Aéronautique*. n° 29. 9/1952.
- [8] - L. MALAVARD.- *La Recherche Aéronautique*. n° 20. 3/1951.
- [9] - G. LIEBMANN.- *Advances in Electronics*. Vol. II, 1950.
- [10] - G. LIEBMANN.- *Nature*. Vol. 164, 7/1949.
- [11] - G. LIEBMANN.- *British Journal of Applied physics*. 1/92/1950.
- [12] - E. PERSICO.- *Il novo Cimento*. Vol. IX, n° 1, 1/1952.
- [13] - C.F. KAYAN.- *General discussion on heat transfer I.M.E. and A.S.M.E.* 1951. Section III.
- [14] - P. HUARD DE LA MARRE.- *C.R.A.S.* t. 235, p. 602, 9/1952.
- [15] - BROIDA.- *Chaleur et Industrie*. 9/10/11/1947.
- [16] - BILLY et BREFORT.- *Chaleur et Industrie*. 4/1952.
- [17] - G.D. Mc CANN et C.H. WILTS.- *Journal of Applied Mechanics*. 9/1949.
- [18] - G.D. Mc CANN, C.H. WILTS, B.N. LOCANTHI.- *P.I.R.E.* 8/1949.
- [19] - G. KRON.- *Electrical Engineering*. Vol. 67, n° 7, July 1948.
- [20] - V. PASCHKIS et M.P. HEISLER.- *Heat transfer*. Atlantic City, 1953.
- [21] - L. BEUKEN.- *IV^{ème} Congrès International du chauffage industriel*, n° 19, 10/1952.
- [22] - M. VERON.- *Bulletins Techniques* n°s 23 et 24. Babcock-Wilcox. 1950/1951.
- [23] - H.C.J.H. GELISSEN.- *Industrial Heating*. 3/1948.
- [24] - BONNIER.- *Verres et réfractaires*. 12/1947 et 10/1948.
- [25] - M. VERON.- *La Technique Moderne*. n°s 7 et 8, 4/1950.
- [26] - V. PASCHKIS et H.D. BAKER.- *Transaction of A.S.M.E.* 64, 2/1942.
- [27] - J. de LACLEMANDIERE.- *Chaleur et Industrie*, n° 269, 12/1947 et n° 270, 1/1948.
- [28] - J. de LACLEMANDIERE.- *La Métallurgie*. n° 7, Vol. 80, 7/1948.
- [29] - K.H. BROKMEIER.- *Disetation*. T.H. Braunschweig. 1950.
- [30] - K.H. BROKMEIER.- *Elektrotechnische Zeitschrift Heft*. 17/9/1951.
- [31] - V. PASCHKIS et M.P. HEISLER.- *Electrical Engineering*. 63, 165/1944.
- [32] - R. CZEPEK.- *Bull. Assos. Suisse Electriciens*. t. 42, n° 11/1951.

- [33] - V. PASCHKIS.- *Transactions of A.S.M.E.* Vol. 38, pp. 117-147. 11/1946.
- [34] - V. PASCHKIS.- *Transactions of American Foundrymen's Society.* 59,4/1951.
- [35] - C. HULSE et R.J. SARJANT.- *Revue de Métallurgie.* 5/1949.
- [36] - SS. VIALOF et L.C. KOGAN.- *Académie des Sciences de l'U.R.S.S. Section Sciences Techniques* n° 1, janvier 1951.
- [37] - W. TIPLER.- *Proceed. 7th International Congress for Applied Mechanics.* Vol. 3, 1948.
- [38] - K. HEINDLHOFFER et B.M. LARSEN.- *Metals Technology.* 8/1945.
- [39] - J.H. NEHER.- *Transaction A.I.E.E.* 70, part II, 1951.
- [40] - CARR B. NELL Jr.- *NACA* 2852, 12/1952 - *NACA* 3025, 10/1953.
- [41] - D. ZANOBETTI.- *L'energia elettrica.* 12/1951.
- [42] - A.B. MACNEE.- *P.I.R.E.*, vol. 37, 11/1949.
- [43] - D.L. WHITEHEAD.- *Westinghouse Engineer.* 11/1950.
- [44] - J.R. RAGAZZINI, R.H. RANDALI et F.A. RUSSEL.- *P.I.R.E.* 3/1947.
- [45] - F.H. RAYMOND.- *Colloque du C.N.R.S.* 1951.
- [46] - E.I. ANGELO.- *Techn. Report.* 249. M.I.T. 1°/1952.
- [47] - S.N. TREVINO et F. OFFNER.- *Review of Scientific Instruments.* Vol. II, 12/1940.
- [48] - G.A. KORN et T.M. KORN.- *Electronic analog computers.* (Mc Graw-Hill).
- [49] - *P.I.R.E.* n° spécial, octobre 1953, vol. 41.
- [50] - P.G. GLOESS et F.H. RAYMOND.- *Onde Electrique* n° 255, 6/1948.
- [51] - J. MIROUX.- *C.R.A.S.* 232, p. 1899, 5/1951.
- [52] - V. PASCHKIS.- *Scientific Monthly.* Vol. 73, n° 2, 8/1951.
- [53] - M.H. Mc ADAMS.- *Transmission de la chaleur.* (Dunod).
- [54] - INGERSOL, ZOBEL et INGERSOL.- *Heat Conduction.* (Mc Graw-Hill).
- [55] - V. PASCHKIS et M.P. HEISLER.- *Journal of Applied Physics.* Vol. 17, n° 4/1946.
- [56] - D.C. de PACKH.- *Review of Scientific Instruments.* Vol. 18, n° 10, 10/1947.
- [57] - M. AVRAMI et V. PASCHKIS.- *Trans-Amer. Inst. of Chemical Eng.* p. 631, 6/1942.
- [58] - V. PASCHKIS.- *Metal Progress*, p. 813, 11/1947.
- [59] - M.P. HEISLER.- *Transactions of A.S.M.E.* Vol. 69, n° 3, 4/1947.
- [60] - W. TRAUPEL.- *Schweizer Archiv*, 7/1948. *Revue Technique Sulzer*, n° 3/1949.
- [61] - A.J. EDE.- *Philosophical Magazine.* 36/pp. 845-851, 1945.
- [62] - S. TACVORIAN.- *Bulletin de la Société Française de Céramique*, Décembre 1955.
- [63] - J. MIROUX.- *Communication aux Journées Internationales de calcul analogique.* Bruxelles, Septembre 1955.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

SUR LA MESURE DES GRADIENTS EN ANALOGIES RHÉOÉLECTRIQUES (APPAREIL POUR LE RELEVÉ DIRECT DES ISOVITESSES)

Vu et approuvé :

Paris, le 6 Juin 1954

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. PÉRÈS

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH

